مقدمة فى

ميكانيكا الكم

تأليف

بى . تى . ماثيوز

ترجمة

الدكتور / أسامة زيد إبراهيم ناجى

دكتوراة فى الفيزياء الذرية والجزيئية النظرية
كلية التربية ـ قسم الطبيعة والكيمياء
جامعة طنطا ـ كفر الشيخ

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مصر ـ القاهرة

مقدمة للمترجم

الحمد لله، وصلى اللهم على سيدنا محمد، وعلى آله وصحبه وسلم.

يعد هذا الكتاب من أبرز الكتب التى قدمت لدارسى ميكانيكا الكم، حيث عرضت مواضيعه بطريقة لايحتاج فيها الدارس إلى معلومات سابقة. كما تابع المؤلف تكرار الإشارة إلى المعلومات الجديدة المبنى عليها هذا العلم حتى يصل المبتدىء إلى الألفة معها.

بمجرد الانتهاء من دراسة الباب الثالث يكون الطالب قد اكتسب فهما عاما لفيزياء الكم واستوعب جميع الأسس المبنية عليها، ولايتبقى له إلا بعض الإضافات البسيطة التى تدور فى نفس المحيط.

فضلا عن أن الكتاب يشمل منهجا متكاملا فى ميكانيكا الكم صالح للتدريس لطلاب السنوات الثالثة والرابعة بكليات العلوم والتربية ومايناظرها، فإنه يحتوى على أجزاء أخرى تعتبر مناهج كاملة فى الفيزياء الذرية والفيزياء النووية، حيث يتجلى مواطن تطبيق هذا العلم.

نلفت انتباه القائمين بتدريس هذا المنهج إلى أن حلول المسائل الواردة بالكتاب تطلب من المترجم إذا دعت الضرورة لذلك.

أرجو من الله أن يكون هذا العمل خالصا لوجهه، وابتغاءً لمرضاته.

عن أنس رضى الله عنه قال: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم، ألا أخبركم عن الأجود؟ الله الأجود، وأنا أجود ولد آدم، وأجودكم من بعدى رجل عَلِمَ علما فانتشر عِلْمُه، يُبْعَث يوم القيامة أمة وحده، ورجل جاد بنفسه فى سبيل الله حتى يقتل.

المترجم

د. أسامة زيد إبراهيم ناجى

الحروف اللاتينية

Greek name	Greek letter Lower case	Capital	Greek name	Greek letter Lower case	Capital
Alpha	α	Α	Nu	ν	Ν
Beta	β	Β	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omicron	ο	Ο
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ε	Ε	Rho	ρ	Ρ
Zeta	ζ	Ζ	Sigma	σ	Σ
Eta	η	Η	Tau	τ	Τ
Theta	θ	Θ	Upsilon	υ	Υ
Iota	ι	Ι	Phi	φ	Φ
Kappa	κ	Κ	Chi	χ	Χ
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	Μ	Omega	ω	Ω

المحتويات

الجزء الأول

الصياغة الأساسية

الباب الأول مقدمة ١٥

١-١ الفيزياء الكلاسيكية ١٥

(أ) *ميكانيكا نيوتن* ١٥

(ب) *النظرية الكهرومغناطيسية* ١٦

١-٢ فشل التصورات الكلاسيكية–نظرية الكم القديمة ١٨

(أ) *الصورة الجسيمية للإشعاع وفرض بلانك* ١٨

(ب) *الصورة الموجية للمادة وفرض دى برولى* ٢٢

(ج) المستويات المتقطعة وفرض بوهر ٢٤

١-٣ ملخص ٢٧

مسائل ١ .... ٢٨

الباب الثانى المؤثرات ٣١

٢-١ تعاريف ومعادلات المؤثرات ٣١

٢-٢ معادلة القيمة المناسبة ٣٣

٢-٣ علاقات المبادلة ٣٤

٢-٤ ملخص ٣٥

مسائل ٢ .... ٣٦

الباب الثالث ميكانيكا الكم ٣٧
٣-١ عملية الملاحظة (القياس) ٣٧
٣-٢ المؤثرات والملاحظات: الفروض التفسيرية ٤٠
٣-٣ الفروض الفيزيائية ٤٢
(أ) مبدأ التناظر ٤٣
(ب) مبدأ التتام ٤٤
٣-٤ معادلة شرودنجر ومستويات الطاقة المتقطعة ٤٦
٣-٥ دوال الحالة وتكامل التطابق ٥٢
٣-٦ مبدأ عدم التحديد ٥٦
٣-٧ ملخص ٦٤
مسائل ٣ .... ٦٦

الباب الرابع الحركة فى بعد واحد ٦٩
٤-١ خطوة الجهد ٦٩
(أ) $E_o > V$ (كلاسيكيا) ٧٠
(ب) $E_o < V$ (كلاسيكيا) ٧٠
الحالة (أ) $E_o > V$ (كميا) ٧٢
الحالة (ب) $E_o < V$ (كميا) ٧٥
٤-٢ الندية ٧٨
٤-٣ الحالات المقيدة ٧٩
مسائل ٤ .... ٨٤

الباب الخامس المهتز التوافقى ٨٧
٥-١ النظرية الكلاسيكية ٨٧
٥-٢ النظرية الكمية-القيم المناسبة ٨٨
٥-٣ دوال القيم المناسبة-مؤثرات الإفناء والتوليد ٩٢
٥-٤ ملخص ٩٤
مسائل ٥ .... ٩٤

الجزء الثانى

الفيزياء الذرية

الباب السادس كمية الحركة الزاوية ٩٩
٦-١ مؤثرات كمية الحركة الزاوية ٩٩
٦-٢ المركبة-z ١٠٠
٦-٣ كمية الحركة الزاوية الكلية-القيم المناسبة ١٠٢
٦-٤ الدوال المناسبة والرسم الاتجاهى ١٠٩
٦-٥ الندية ١١٢
٦-٦ ملخص ١١٤
مسائل ٦ .... ١١٤

الباب السابع طاقة الوضع المركزية: ذرة الهيدروجين ١١٧
٧-١ الحركة فى مجال طاقة وضع مركزية ١١٧
٧-٢ ذرة الهيدروجين ١٢٠
٧-٣ الأعداد الكمية ١٢٤

٧-٤ الدوال المناسبة ١٢٥

٧-٥ حركة مركز الكتلة ١٢٧

٧-٦ ملاحظات عامة ١٣٠

مسائل ٧ .... ١٣١

الباب الثامن المغزلية والإحصاء

٨-١ تأثير زيمان ١٣٣

٨-٢ المؤثرات المصفوفة ١٣٦

٨-٣ المغزلية ١٣٩

٨-٤ الإحصاء ومبدأ الاستبعاد ١٤٥

٨-٥ التركيب الذرى ١٤٩

٨-٦ عرض للتطورات الإضافية ١٥١

مسائل ٨ .... ١٥٥

الجزء الثالث

الفيزياء النووية

الباب التاسع استطارة رذرفورد وتحلل-ألفا

٩-١ استطارة رذرفورد ١٥٩

٩-٢ التفاعلات النووية ١٦٢

٩-٣ تحلل-ألفا ١٦٤

٩-٤ ملخص ١٧٢

مسائل ٩ .... ١٧٣

الباب العاشر نظرية الاستطارة

١٠-١ مقدمة ١٧٥

١٠-٢ نظرية الاستطارة الكلاسيكية ١٧٦

(أ) *الاستطارة الكلاسيكية الناشئة عن كرة صلبة* ١٧٩

(ب) *الاستطارة الكولومية* ١٨١

١٠-٣ نظرية الاستطارة الكمية ١٨٣

١٠-٤ تحليل إزاحة الطور ١٨٦

١٠-٥ النظام المعملى ونظام مركز الكتلة ١٩٢

١٠-٦ ملخص ١٩٦

مسائل ١٠ .... ١٩٧

الباب الحادى عشر تفاعل النيوكلون-نيوكلون

١١-١ الديوترون ١٩٩

١١-٢ استطارة النيوترون-بروتون ٢٠٤

١١-٣ التفاعلات المعتمدة على المغزلية ٢٠٨

١١-٤ عرض للتطورات الإضافية ٢١٢

الجزء الرابع

النظرية العامة والفيزياء النووية-الجزئية

الباب الثانى عشر المؤثرات ومتجهات الحالة

١٢-١ رموز ديراك ٢٢٣

١٢-٢ مؤثرات الملاحظة-المسعامدية ٢٢٨

١٢-٤ التتام ٢٣٣

١٢-٥ وسائل استخدام المؤثرات ٢٤٠

(أ) *المهتز التوافقى* ٢٤٠

(ب) *كمية الحركة الزاوية* ٢٤٣

١٢-٦ ملخص ٢٤٨

مسائل ١٢ .... ٢٥٠

الباب الثالث عشر معادلات الحركة

١٣-١ معادلة شرودنجر للحركة ٢٥٨

١٣-٢ معادلة الحركة لهيزنبرج ٢٥٨

١٣-٣ ثوابت الحركة-الندية ٢٦٣

١٣-٤ قوانين الحفظ وعدم التغير ٢٦٧

١٣-٥ ملخص ٢٧٣

مسائل ١٣ .... ٢٧٤

الباب الرابع عشر القاعدة الذهبية

١٤-١ نظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن ٢٧٥

١٤-٢ استطارة طاقة الوضع ٢٨٤

١٤-٣ الانتقالات الإشعاعية ٢٩١

١٤-٤ تحلل-بيتا ٢٩٨

١٤-٥ ملخص ٣٠٤

مسائل ١٤ .... ٣٥٠

الباب الخامس عشر التماثل الوحدى والفيزياء النووية-الجزئية

١٥-١ التفاعلات القوية والشحنة الكهربية والشحنة الباريونية
والشحنة الفوقية ٣٠٧
١٥-٢ المغزلية النظائرية والمجموعة SU(2) ٣١٣
١٥-٣ طريقة الثمانى والمجموعة SU(3) ٣٢٠
١٥-٤ ملخص ٣٢٩

ملحق ٣٣١

الجزء الأول

الصياغة الأساسية

الباب الأول
مقدمة

تعد ميكانيكا الكم أنهـا النظريـة التـى نتعـامل بهـا مـع الأنظمـة الذريـة والنووية. تطورت هذه النظرية من خلال الميكانيكا الكلاسيكية وعلى وجـه الخصوص ميكانيكا نيوتن[1] والنظرية الكهرومغناطيسية لماكسويل[2] .

نبدأ دراستنا بعرض تصورات النظرية الكلاسيكية[3]، ثم بعدها نوضـح عدم كفاية هذه التصورات كلية لوصف الأنظمة الذرية، وسوف نسـتعرض الفروض التى أدخلها كل من بلانك[4] وبوهر[5] ودى برولى[6] على النظريـة الكلاسيكية لتأسيس مايسمى بميكانيكا الكـم القديمـة[7]. تلـك الفـروض أمدتنـا بوصف فلسفى، غير مقنع ولكنه ناجح جزئيا، للظواهر الذرية مما أدى إلـى إعـادة الصياغـة الأساسـية للنظريـة الفيزيائيـة الخاصـة بالأنظمـة الميكروسكوبية[8]، وهذا ماسوف نقدمه فى الأبواب التالية.

١-١ الفيزياء الكلاسيكية

(أ) *ميكانيكا نيوتن*

ينظر إلى المادة، من الوجهة الكلاسيكية، على أنها تتكون من جسيمات نقطية تتحرك تحت تـأثير قـوى التفـاعل المتبادلـة فيمـا بينهـا طبقـا لقوانين نيوتن. أهم هذه القوانين هو قانون الحركة

القوة = الكتلة × العجلة

---

(1) Newtonian mechanics (2) Maxwell's electromagnetic theory
(3) classical theory (4) Plank (5) Bohr (6) De Broglie
(7) old quantum mechanics (8) microscopic systems

بالاشتراك مع قانون الجاذبية.

نجحت هذة النظرية فى وصف حركة الكواكب، كما أمدتنا بوجه عام بوصف مقنع لحركة الأنظمة الماكروسكوبية[1] المتعادلة كهربيا.

جوهر ميكانيكا نيوتن يكمن فى أننا نتعامل مع المادة فى صورة جسيمات بكتلة محددة، كما أن حركة أى جسيم حر[2] تعرف تعريفا تاما بدلالة طاقته E وكمية حركته P .

(ب) *النظرية الكهرومغناطيسية*

يهتم الشق الثانى من الفيزياء الكلاسيكية بدراسة الظواهر الكهربية والمغناطيسية، حيث نجد أن أفضل وصف لها يتم بدلالة المجالين الكهربى E(x) والمغناطيسى B(x). يرتبط هذان المجالان بكثافة الشحنة[3] وكثافة التيار[4] من خلال معادلات ماكسويل المعروفة (يمكن الرجوع لهذه المعادلات فى أى كتاب آخر، وذلك لعدم احتياجنا لتلك المعادلات على وجه الخصوص فى دراستنا الحالية). غاية مافى الأمر أننا نستخلص من هذه المعادلات (فى الفراغ الحر[5]) أن كلا من المجال الكهربى والمجال المغناطيسى يحقق المعادلة:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\begin{bmatrix}E(x)\\B(x)\end{bmatrix}=0 \qquad (١-١)$$

هذا ينص على أن هذين المجالين ينتشران فى الفراغ على شكل موجات[6] بسرعة ثابتة c. وقد كان من تخمين ماكسويل أن هذه الموجات وبترددات

(1) macroscopic systems (2) free particle
(3) charge density (4) current density (5) free space (6) waves

مناسبة هى التى تميز الإشعاع أو الضوء المرئى[1]. مألوف لنا الآن الأشكال الأخرى لمثل هذا الإشعاع، ابتداءً من مدى الترددات المنخفضة للغاية المستخدمة فى الرادار[2] وعلم الفلك الإشعاعى[3]، مرورا بالمدى المرئى للإشعاع حتى نصل إلى الإشعاعات ذات الترددات العالية جدا مثل الأشعة السينية[4] وإشعاعات جاما[5] .

ندرك فى علم الضوء الهندسى[6] وجود العديد من الظواهر التى تفسر دون الرجوع إلى التصور الموجى للإشعاع. إلا أن حالتى التداخل والحيود[7] لاتفسر تفسيرا مقنعا إلا تحت شرط التصور الموجى للإشعاع.

يعبر عن الموجة النموذجية على النحو:

$$\exp[-\iota(\omega t - k\cdot x)] \qquad (١-٢)$$

حيث تميز الموجة بكل من التردد الزاوى[8] ω ومتجه الانتشار[9] **k** (يرتبط التردد ν والطول الموجى λ بكل من ω ، **k** بالعلاقتين $|k| = 2\pi/\lambda;\ \omega = 2\pi\nu$). وحيث أن السرعة هى c فإن

$$\omega = |k|c \qquad (١-٣)$$

يمكن الجمع بين هذين الشقين، الميكانيكا والكهرومغناطيسية، باستخدام قانون لورنز[10]، الذى ينص على أنه إذا تحرك جسيم شحنته e بسرعة υ تحت تأثير مجال كهربى ومجال مغناطيسى فسوف يتأثر بقوة مقدارها

$$F(x) = e\left(E(x) + \frac{1}{c}\upsilon \wedge B(x)\right) \qquad (١-٤)$$

من ناحية المبدأ، استطاع هذا التصور الكلاسيكى للعالم (وهو اعتبار

---

(1) visible light (2) radar (3) radio astronomy (4) X-rays
(5) γ -rays (6) geometrical optics (7) interference and diffraction
(8) angular frequency (9) propagation vector (10) Lorentz law

أن المادة تتكون من جسيمات نقطية والإشعاع يتكون من موجات) أن يمدنا بالصياغة الأساسية اللازمة لوصف كل الظواهر الفيزيائية؛ بكون الجسيمات النقطية هى البروتونات والإلكترونات (حيث كل منهما يميز بكتلة معينة ويحمل وحدة الشحنة الكهربية) التى يتم التفاعل فيما بينها تبعا للقوى الكهرومغناطيسية وقوى الجاذبية الأساسية.

إلا أنه، وحتى قبل اكتشاف البروتون، برهنت التصورات الكلاسيكية على عدم كفايتها تماما لوصف حركة الإلكترون أوكيفية تفاعله مع الإشعاع.

١-٢ فشل التصورات الكلاسيكية-نظرية الكم القديمة

(أ) *الصورة الجسيمية للإشعاع*[1] *وفرض بلانك*

من الناحية التاريخية، ظهر أول دليل على فشل التصورات الكلاسيكية من دراسة ظاهرة إشعاع الجسم الأسود[2] ، التى انصبت الدراسة فيها على ديناميكية تبادل الطاقة بين الإشعاع والمادة. كلاسيكيا فقد افترض أن هذا التبادل يتم بصورة متصلة[3] ، بمعنى أن أى إشعاع بتردد زاوى ω يمكن أن يعطى أى مقدار من الطاقة عند الامتصاص[4]. هذا المقدار يعتمد بالتحديد، لأى حالة خاصة، على شدة الطاقة[5] فى الإشعاع. أظهر بلانك إمكانية الحصول على معادلة ديناميكية صحيحة لوصف إشعاع الجسم الأسود وذلك فقط على فرض أن تبادل الطاقة بين المادة والإشعاع يتم بصورة متقطعة[6]. وعلى وجه التحديد افترض بلانك أن أى إشعاع بتردد زاوى ω

---

(1) particle aspects of radiation (2) black body radiation
(3) continuous (4) absorption (5) energy intensity (6) discrete

يقوم بتبادل الطاقة مع المادة بوحدات $\hbar\omega$ فقط، حيث $\hbar$ ثـابت عـام؛ يرتبط بثابت بلانك بالعلاقة:

$$h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-27} \quad cgs \qquad (١-٥)$$

بطريقة أخرى، يمكن القول أن فرض بلانك ينص على أن أى إشـعاع بتردد ω يتصرف كما لو كان عبارة عن تيار من الجسيمات (سـميت هـذه الجسيمات فيما بعد بالفوتونات[1])، وكل جسيم يحمل طاقة مقدارها

$$E = \hbar\omega \qquad (١-٦)$$

وأن هذه الطاقة يمكن أن تنبعث أو تمتص بواسطة المادة. نظـرا لانبعـاث الفوتونـات بسـرعة مسـاوية لسـرعة الضـوء، فإنـه طبقـا للنظريــة النسـبية الخاصة تكون كتلة سـكونها[2] مسـاوية للصفـر. تكتـب العلاقـة النسبية بيـن الطاقة E وكمية الحركة الخطية **P** على النحو

$$\frac{E^2}{c^2} = P^2 + m^2c^2 \qquad (١-٧)$$

وحيث أنه للفوتونات $m = 0$ ،يكون

$$P = \frac{E}{c} \qquad (١-٨)$$

بحذف c من المعادلتين (١-٣)، (١-٨) وإعادة كتابة المعادلة (١-٦) مـرة أخرى، نجد

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \hbar\omega \\ P &= \hbar k \end{aligned}} \qquad (١-٩)$$

هذه المعادلة تظهر بوضوح العلاقة بين البارامترات الجسـيمية (**E, P**)، أى التى تميز الجسيمات، والبارامترات (ω , **k**) للموجة المناظرة.

---

(1) photons (2) rest mass

تتجلى بوضوح الصورة الجسيمية للإشعاع في ظاهرة التأثير الكهروضوئى[1]. فعند سقوط حزمة من الأشعة، وحيدة الطول الموجى[2]، التى ترددها الزاوى ω، على سطح معدن ينبعث من هذا المعدن عدد من الإلكترونات. إذا كان $\hbar\omega$ أصغر من مقدار محدد W (W تعتمد على طبيعة المعدن) لا ينبعث أى إلكترونات من سطح المعدن مهما تغيرت شدة الإشعاع الساقط. أما إذا كان $\hbar\omega > W$ فينبعث إلكترونات بطاقة حركة T، حيث

$$\hbar\omega = W + T \tag{١-١٠}$$

من الملاحظ أنه حتى فى حالة انبعاث إلكترونات فإن طاقة حركتها T لاتعتمد على شدة الإشعاع الساقط ولكن تعتمد على تردده فقط. هذا مالايمكن فهمه على أساس المفهوم الكلاسيكى لتبادل الطاقة بين المادة والإشعاع بصورة متصلة. إلا أنه من السهل فهم ظاهرة التأثير الكهروضوئى على أساس فرض فوتونات بلانك، وذلك كما يلى:

W هو مقدار الشغل اللازم لتحرير إلكترون واحد من طاقة الوضع الجاذبة بسطح المعدن. الطاقة $\hbar\omega$ تنتقل بواسطة الفوتونات إلى الإلكترون الموجود بسطح المعدن. فإذا كان طاقة الفوتون أقل من W لاينبعث أى إلكترونات. أما إذا كان طاقة الفوتون أكبر من W وأعطى الفوتون كل طاقته، $\hbar\omega$، لإلكترون ما فإن هذا الإلكترون يتحرر حاملا طاقة حركة تعطى بالمعادلة (١-١٠).

يعتبر التأثير الكهروضوئى تأكيدا مباشرا على فرض بلانك، حيث يعتمد فقط على ميكانيكية تبادل الطاقة بين الإشعاع والمادة (الإلكترونات)

---

(1) photoelectric effect (2) monochromatic light

ولايدخل فى هذه الظاهرة أى تأثيرات فيزيائية أخرى.

التأثير الكهروضوئى وإشعاع الجسم الأسود يوضحان فقط أن تبادل الطاقة يتم بوحدات $\hbar\omega$. أما الطبيعة الجسيمية للإشعاع نفسه فتتجلى عند دراسة استطارة الأشعة السينية بواسطة الإلكترونات (تأثير كومتون[1]).

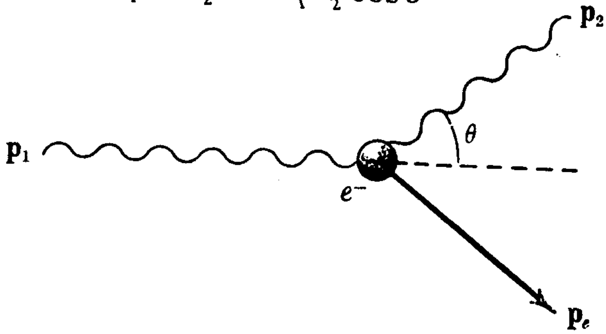
نعتبر اصطدام فوتون كمية حركته P_1 (طاقته P_1c) مع إلكترون ساكن كتلته m. بعد التصادم تصبح كمية حركة الفوتون P_2 (طاقته P_2c)، وكمية حركة الإلكترون P_e.

من قانون حفظ كمية الحركة، نجد

$$P_1 = P_2 + P_e \tag{١-١١}$$

ومنه

$$P_e^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\vartheta \tag{١-١٢}$$



شكل ١-١ رسم يوضح تصادم فوتون كمية حركته P_1 مع إلكترون ساكن. بعد التصادم ينبعث فوتون بكمية حركة P_2 ويرتد الإلكترون بكمية حركة P_e.

باستخدام قانون حفظ الطاقة المستنتج من النظرية النسبية الخاصة (انظر

---

(1) Compton effect

المعادلة (١-٧))، نحصل على

$$P_1 + mc = P_2 + \left(P_e^2 + m^2c^2\right)^{1/2} \qquad (١-١٣)$$

بحذف P_e^2 من المعادلتين (١-١٢)، (١-١٣) نجد

$$mc\left(P_1 - P_2\right) = 2P_1P_2 \sin^2 \vartheta / 2 \qquad (١-١٤)$$

بالقسمة على $P_1\,P_2$ والتعبير عن الناتج في صورة الطول الموجى الذى يعطى من المعادلة (١-٩) بالعلاقة

$$\lambdabar = \hbar / p \qquad (١-١٥)$$

نحصل على

$$\lambdabar_2 - \lambdabar_1 = 2\lambdabar_e \sin^2 \vartheta / 2 \qquad (١-١٦)$$

حيث $\lambdabar_e$ هو طول موجة كومتون للإلكترون[1] ، ويساوى

$$\lambdabar_e = \hbar / mc \approx 4 \times 10^{-11} \quad \text{cm} \qquad (١-١٧)$$

كيفية التغير فىالطول الموجى، المعادلة (١-١٦)، الذى يعتمد على زاوية استطارة الفوتون فقط، ولايعتمد على تردد الإشعاع الساقط، هو مالوحظ عمليا بالفعل.

حصلنا على هذا البرهان النظرى على أساس معاملة الفوتون كجسيم، أى على أساس التصور الجسيمى للإشعاع. الجدير بالذكر أنه لايمكن الحصول على معادلة نظرية تتفق مع الملاحظ تجريبيا تحت فرض التصور الموجى للإشعاع.

(ب) الصورة الموجية للمادة[2] وفرض دى برولى

---

(1) electron Compton wave-length (2) wave aspects of matter

جاءت تجارب دافيسون وجرمر[1] لتتمم التأثيرات السـابقة التـى تجلت فيها الصورة الجسيمية للإشعاع. بينت هذة التجارب أنه عند انعكاس حزمة من الإلكترونات من على سطح بلورة النيكل فإن الإلكترونـات المنعكسة تكون نموذجا للحيود[2] مشـابها تمامـا لنمـوذج حيـود الضـوء بواسطة المحزوز. ظهر أيضـا أن نمـوذج حيـود الإلكترونـات لايختفـى حتـى لـو كـانت كثافـة الإلكترونات صغيرة بدرجة كافية لمرور إلكترون واحد فقط بالجهاز عند كل لحظة زمنية. وبما أن الحيود يعد من الظواهر الموجية فإن تجلـى هذه الظاهرة تحت هذه الظـروف يدلـل علـى أن موجـة بشـكلها العـام، المعادلـة (١-٢)، يجب أن تصاحب بطريقة ما حركة الإلكترون المفرد، الـذى عـادة مايعبر عنه بالبارامترات (**E, P**).

حتى قبل تجارب دافيسون وجرمر فقد خمـن دى برولـى أن المعادلـة (١-٩)، التى تربط بين الشكل الجسيمى والموجى للإشعاع، يجب أن تطبق أيضا على الإلكترونات. هذا يعنى أن أى إلكترون طاقتـه **E** وكميـة حركتـه **P** يصاحبه بطريقة ما موجة دى برولى،

$$\exp\left[-\iota\left(Et - P\cdot x\right)/\hbar\right] \qquad (١٨-١)$$

تلك العلاقة التى تجمع بين البـارامترات الجسيمية والموجيـة، مـع قيمـة $\hbar$ التى عينت من قبل بواسطة التأثيرات الإشعاعية، تمدنا بالمعادلـة التجريبيـة الصحيحـة التـى تربـط بيـن عـرض منـاطق الحيـود[3] وطاقـة الإلكترونـات (انظر المسألة ١-٥).

---

(1) Davisson and Germer
(2) diffraction pattern
(3) diffraction bands

(ج) المستويات المتقطعة[1] وفرض بوهر

ظهر فشل النظرية الكلاسيكية أكثر وضوحا عند تطبيقها على حركة الإلكترون بذرة الهيدروجين. برهنت تجارب رذرفورد[2] على إمكانية النظر للذرة على أنها عبارة عن إلكترونات سالبة الشحنة (إلكترون واحد فى حالة الهيدروجين) تدور حول نواة موجبة الشحنة وثقيلة نسبيا (بروتون[3] واحد فى حالة الهيدروجين). بإهمال الإشعاع فإن هذا النظام يشبه تماما حركة أى كوكب حول الشمس، مع استبدال قوى الجاذبية بين الكتل بالتجاذب الكولومى[4] بين الشحنات.

من غير المعقول (رغم النجاح العظيم لقوانين نيوتن للجذب بين الكتل) اعتقاد أن التشابه الكهربى سوف يمدنا بدفعة قوية للنظرية الكلاسيكية. سبب ذلك يرجع بالطبع إلى أننا لانستطيع إهمال الإشعاع. فالإلكترون الدوار عبارة عن شحنة سريعة التعجيل وعليه يعمل، طبقا لنظرية ماكسويل، كمصدر لطاقة مشعة. وتبعا للنظرية الكلاسيكية ففى حوالى 10^{-10} ثانية سوف يتجه الإلكترون حلزونيا ليتحد مع البروتون معطيا طاقته الميكانيكية على شكل ومضة قصيرة من الضوء.

يرتبط تردد الإشعاع الصادر بتردد الإلكترون فى مداره. وعليه فعندما يشع الإلكترون طاقة فإن تردده، كلاسيكيا، سوف يتغير بسرعة وبصورة متصلة وبالتالى يتولد إشعاع على مدى متصل من الترددات.

مما سبق نستنتج أن النظرية الكلاسيكية لذرة رذرفورد تملى علينا الخاصيتين الآتيتين:

---

(1) discrete levels (2) Rutherford (3) proton
(4) Coulomb attraction

١- يجب أن تكون الذرة غير مستقرة على الإطلاق.

٢- يجب أن تشع طاقة على مدى متصل من الترددات.

هاتان الخاصيتان فى تناقض تام مع الواقع الفعلى. واضح أن الخاصية الأولى غير متحققة، حيث أن الذرات تعتبر من أكثر الأشياء التى نعرفها استقرارا. أما تناقض الخاصية الثانية مع الواقع التجريبى فقد ظهر من الدراسة المفصلة للإشعاع الصادر من ذرة الهيدروجين، التى أجراها بالمر[1] سنة ١٨٨٥، حيث تحقق من أن الترددات المنبعثة تكون متقطعة، وأن بعض الخطوط الملاحظة تحقق المعادلة الاختيارية:

$$\omega = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad n = 3,4,5,\ldots \qquad (١-١٩)$$

يعد ظهور هذه الفئة المتقطعة من القيم الممكنة للترددات أنها من السمات الوصفية الجديدة للذرة. كلاسيكيا، التردد الزاوى ω يتغير بصورة متصلة.

اقترح بوهر بعض القواعد، لاستخلاص النتائج الملاحظة بالتجربة من النظرية شبه الكلاسيكية. ولتبسيط الإجراءات الرياضية سنذكر ذلك للمسارات الدائرية فقط.

وضع بوهر القواعد التالية:

(أ) قيمة كمية الحركة الزاوية ℓ للإلكترون تمثل بعدد صحيح مضروبا فى $\hbar$

$$\ell = n\hbar \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (١-٢٠)$$

هذا يعنى أن كمية الحركة الزاوية تأخذ قيما متقطعة فقط، وهذا بدوره يؤدى إلى أن القيم المتاحة للطاقة E تكون متقطعة هى الأخرى.

---

(1) Palmer

(ب) ينبعث إشعاع عندما يُحدِث الإلكترون إنتقالات متقطعة من مدار طاقته E_n إلى آخر طاقته $E_{n'}$، مثلا. والتردد الزاوى الناشىء يعين من العلاقة

$$\hbar\omega_{nn'} = \left|E_n - E_{n'}\right| \qquad (٢١-١)$$

بتطبيق هذه القواعد على ذرة الهيدروجين التى فيها يدور الإلكترون الذى كتلته m بسرعة زاوية ω حول نواة (ثابتة) مُحدِثا مسارا دائريا نصف قطره a (لاحظ أن ω هى السرعة الزاوية للإلكترون فى مساره الدائرى، أما $\omega_{nn'}$ فهو التردد الزاوى للإشعاع الصادر نتيجة لانتقال الإلكترون بين المستويين n, n'). حينئذ تكون معادلة الحركة التى تربط التجاذب الكولومى بالعجلة المحورية، على النحو $\left(e_M^2 \equiv e^2/(4\pi\varepsilon_o)\right)$

$$\frac{e_M^2}{a^2} = m a \omega^2 \qquad (٢٢-١)$$

أما القاعدة الأولى لبوهر فتعطى

$$m a^2 \omega = n\hbar \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (٢٣-١)$$

بحل هاتان المعادلتان نحصل على فئة من أنصاف أقطار المسارات المتقطعة الممكنة

$$a_n = \left(\frac{\hbar^2}{m e_M^2}\right) n^2 \equiv a_o n^2 \qquad (٢٤-١)$$

والسرعات الزاوية المناظرة

$$\omega = \frac{m e_M^4}{\hbar^3} \frac{1}{n^3} \qquad (٢٥-١)$$

تعطى الطاقة الكلية من طاقتى الحركة والوضع. لذلك فإن قيم المستويات المتقطعة للطاقة تساوى

$$E_n = \frac{m}{2}a_n^2\omega^2 - \frac{e_M^2}{a_n} = -\frac{me_M^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\frac{e_M^2}{a_o}\right)\frac{1}{n^2} \qquad (١-٢٦)$$

المسافة الأساسية a_o، المعرفة بالمعادلة (١-٢٤)، هى نصف قطر أدنى مستوى طاقة لبوهر. ومن المعادلة (١-٢١) فإن الترددات الزاوية الممكنة للإشعاع هى

$$\omega_{nn'} = \frac{e_M^2}{2\hbar a_o}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \qquad (١-٢٧)$$

الفئة التى فيها $n = 2$، $n' = 3,4,5$ عبارة عن ثلاثة خطوط تقع فى المنطقة المرئية من الضوء، وتُكون جزء من مجموعة بالمر سالفة الذكر.

ذرة بوهر مستقرة، حيث لايوجد إمكانية لانبعاث أى طاقة إشعاعية بمجرد أن يصل الإلكترون إلى أدنى مستوى طاقة E_1، المعطى بالمعادلة (١-٢٦).

١-٣ ملخص

عمليات تفسير الظواهر الذرية كلاسيكيا، بإدخال علاقات اختيارية إضافية، تمت لحالات غير التى أشرنا إليها من قبل. ولكن لايوجد سبب هنا للإسهاب أكثر من ذلك. من غير المقنع التعامل مع كل من الإشعاع والمادة فى بعض الأحيان باعتبارها موجات، وفى أحيان أخرى باعتبارها جسيمات، وذلك بطريقة اختيارية ظاهرة. كما أننا حصلنا أيضا على المستويات المتقطعة لذرة الهيدروجين بتطبيق قواعد أدخلت *بالتخمين*، وهذا يخالف فحوى الميكانيكا الكلاسيكية. ما نتطلبه هو *صياغة أساسية لنظرية*

جديدة تُبقى التصورات الكلاسيكية صحيحة، وفى نفس الوقت تطفو قواعد بلانك و بوهر ودى برولى كنتيجة طبيعية لتكوين مترابط. هذا هو جوهر ميكانيكا الكم التى سنؤسس مبادئها بالباب الثالث. لهذا تدخل القواعد السابقة كمرشد هام فى بناء هذه النظرية.

من هنا نرى أن السمات الأساسية، الغير كلاسيكية، التى يستلزم ظهورها بطريقة طبيعية فى النظرية الجديدة هى

١- الصورة الجسيمية للإشعاع-الفوتونات---(بلانك)؛

٢- الصورة الموجية للجسيمات---(دى برولى)؛

٣- ظهور بعض المتغيرات الفيزيائية فى صورة فئة متقطعة (بدلا من المدى المتصل) من القيم الممكنة-وعلى وجه الخصوص مستويات طاقة ذرة الهيدروجين---(بوهر).

مسائل ١

(للحصول على قيم الثوابت راجع الملحق)

١-١ التردد الزاوى ω للضوء المرئى يساوى حوالى 10^{16} sec^{-1} . يمكن مساواة هذا التردد بانتقال بوهر القياسى، المعادلة (١-٢٧). بمعلومية كل من m,e وضح أن هذا يؤدى إلى قيمة للمقدار $\hbar$ متفقة تقريبا مع القيمة التى حصل عليها بلانك (قيمة بلانك: $\hbar \approx 10^{-34}$ mks).

١-٢ ماهو نصف قطر أدنى مستوى طاقة لبوهر، بالسنتيمتر؟ ماهى طاقة الحالة الأرضية بالإرج وبالإلكترون فولت؟ برهن على أن طاقة الحركة فى أى مدار كولومى دائرى تساوى الطاقة الكلية فى المقدار وتختلف معها فى

الإشارة. ومن ثم وضح أن كمية الحركة المماسية فى أدنى مدار لبوهر تساوى حوالى 2×10^{-24} mks .

١-٣ أوجد الزمن اللازم لعمل دورة كاملة، بأدنى مدار لبوهر، بدلالة كل من $m, e, \hbar$. ثم أوجد قيمة هذا الزمن بالثوانى.

١-٤ وضح أن السرعة υ للإلكترون، فى أدنى مدار لبوهر، تساوى $e_M^2/\hbar$. ثم عبر عن هذه السرعة فى صورة جزء من سرعة الضوء c. (هذه النسبة هى $e_M^2/\hbar c = \upsilon/c$، وتعرف بثابت التركيب الدقيق(1). أنظر المعادلة (٨-٦٠)).

هل من المعقول، كتقريب من الرتبة الأولى، إهمال التأثيرات النسبية فى النظرية عند تطبيقها على ذرة الهيدروجين؟

١-٥ وضح أن الطول الموجى λ المصاحب لإلكترون طاقة حركته T يكتب، طبقا لعلاقة دى برولى (١-٩)، كما يلى:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}}$$

تبعا للمعادلة القياسية لمحزوز الحيود فإن الأطوال الموجية، التى تتداخل تداخلا بناء فى حالة انحراف الإلكترونات بزاوية ϑ بواسطة بلورة المسافات بين الذرية لها d، تعطى بالعلاقة

$$n\lambda = d\sin\vartheta$$

بوضع

$$n = 1 \ ; \ \sin\vartheta \cong 1 \ ; \ d \cong a_o$$

نحصل على

---

(1) fine structure constant

$$\lambda \cong a_0$$

بمساواة العلاقتان المعبرتان عن λ ببعضهما، نحصل على $\hbar$ بدلالة طاقة حركة الإلكترونات فى تجربة للحيود.

$$2\pi\hbar = \sqrt{2mT}\, a_0$$

بين أنه عندما يكون $T \cong 50\ eV$ (تلك هى القيمة المستخدمة فى تجربة دافيسون وجرمر) فإن هذا يؤدى إلى قيمة للثابت $\hbar$ متفقة مع التى حصل عليها بلانك، وكذلك مع القيمة المستنتجة من علاقة بوهر.

الباب الثانى

المؤثرات[1]

٢-١ تعاريف ومعادلات المؤثرات[2]

قبل البدأ فى وضع أسس ميكانيكا الكم يجب تقديم ذلك الجزء من النظرية الحسابية، ألا وهو المؤثرات. حيث أنه يلعب دورا حيويا فيما سيأتى من دراسة.

باختصار نقول أن المؤثر، الذى نرمز له بالرمز $\hat{A}$ ، يمثل أى عملية حسابية تطبق على أى دالة فى x ، مثلا، وتحولها إلى دالة أخرى. من أبسط الأمثلة على المؤثرات، هو اعتبار أن المؤثر $\hat{A}$ نفسه دالة فى x، أى $\hat{A}(x)$ ، واعتبار العملية الحسابية أنها عملية الضرب. لذلك فإننا نضع،

$$\hat{A}(x) = x$$

حينئذ، المؤثر x يؤثر على أى دالة $\psi(x)$ ويحولها إلى دالة جديدة $x\psi(x)$.

مثال آخر أقل سهولة هو اعتبار العملية الحسابية أنها عملية التفاضل. أى وضع المؤثر $\hat{A}$ فى صورة أى دالة فى $\partial/\partial x$، أى أن

$$\hat{A} = \hat{A}(\partial/\partial x)$$

مثلا $\hat{A} = \partial^2/\partial x^2$

للحصول على مؤثر أكثر عمومية نعتبر أنه دالة فى $x, \partial/\partial x$ معا، أى أن

$$\hat{A} = \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})$$

---

(1) operators (2) operator equations

نحن الأن بصدد إدخال فكرة معادلة المؤثر. نعتبر المؤثر

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}x \qquad (٢-١)$$

لهذا، فإنه لأى دالة $\psi(x)$ يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x) = \psi(x) + x\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (٢-٢)$$

$$= \left(1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \qquad (٢-٣)$$

للحصول على المتساوية الأولى (٢-٢) استخدمنا القاعدة العادية لتفاضل حاصل الضرب $x\psi(x)$. وهى نفسها الفكرة العادية لأن المشتقة $\partial/\partial x$ تؤثر فقط على أى دالة تتواجد على يمينها.

نظرا لأن المتساوية الأخيرة (٢-٣) متحققة لأى دالة $\psi(x)$ فيمكن ملاشاة المعامل $\psi(x)$ الموجود على يمين الطرفين، ونكتب معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x}x = 1 + x\frac{\partial}{\partial x} \qquad (٢-٤)$$

وعلى وجه العموم، فلأى معادلة مؤثر مكتوبة على النحو

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \hat{B}(x,\frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x,\frac{\partial}{\partial x}) \qquad (٢-٥)$$

فإنها تعنى أن

$$\left[\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) = \left[\hat{B}(x,\frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) \qquad (٢-٦)$$

وذلك لأى دالة $\psi(x)$.

نحن الأن بصدد إدخال فكرة معادلة المؤثر. نعتبر المؤثر

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}x \qquad (١-٢)$$

لهذا، فإنه لأى دالة $\psi(x)$ يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x) = \psi(x) + x\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (٢-٢)$$

$$= \left(1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \qquad (٣-٢)$$

للحصول على المتساوية الأولى (٢-٢) استخدمنا القاعدة العادية لتفاضل حاصل الضرب $x\psi(x)$. وهى نفسها الفكرة العادية لأن المشتقة $\partial/\partial x$ تؤثر فقط على أى دالة تتواجد على يمينها.

نظرا لأن المتساوية الأخيرة (٢-٣) متحققة لأى دالة $\psi(x)$ فيمكن ملاشاة المعامل $\psi(x)$ الموجود على يمين الطرفين، ونكتب معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x}x = 1 + x\frac{\partial}{\partial x} \qquad (٤-٢)$$

وعلى وجه العموم، فلأى معادلة مؤثر مكتوبة على النحو

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x}) = \hat{B}(x,\frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x,\frac{\partial}{\partial x}) \qquad (٥-٢)$$

فإنها تعنى أن

$$\left[\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) = \left[\hat{B}(x,\frac{\partial}{\partial x}) + \hat{C}(x,\frac{\partial}{\partial x})\right]\psi(x) \qquad (٦-٢)$$

وذلك لأى دالة $\psi(x)$.

٢-٢ معادلة القيمة المناسبة[1]

ينتمى إلى كل مؤثر $\hat{A}(x,\partial/\partial x)$ فئة من الأعداد a_n وفئة من الدوال $u_n(x)$ المعرفة بالمعادلة

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})u_n(x) = a_n u_n(x) \tag{٢-٧}$$

حيث a_n هى القيمة المناسبة[2] ، أو القدر المناسب. $u_n(x)$ هى الدالة المناسبة[3] لهذا القدر المناسب.

حينئذ، تكون الدوال المناسبة لأى مؤثر هى تلك الدوال الخاصة[4] التى تبقى بدون تغيير عند التأثير عليها بالمؤثر، بغض النظر عن ضربها فى القيمة المناسبة.

العلاقة (٢-٧) تسمى معادلة القيمة المناسبة للمؤثر $\hat{A}$. لفهم ذلك نضع

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x}) = -\iota\frac{\partial}{\partial x} \tag{٢-٨}$$

واعتبار أن $u_n(x)$ دالة دورية[5] فى المدى L، كشرط للحدود[6]. على ذلك، تصبح معادلة القيمة المناسبة (٢-٧) فى الصورة

$$-\iota\frac{\partial}{\partial x}u_n(x) = a_n u_n(x) \tag{٢-٩}$$

ولهذا

$$u_n(x) = e^{\iota a_n x} \tag{٢-١٠}$$

حيث، من شرط الحدود، a_n تُكَوِّن فئة متقطعة،

$$a_n = \frac{2n\pi}{L} \tag{٢-١١}$$

---

(1) the eigenvalue equation (2) eigenvalue (3) eigenfunction
(4) special functions (5) periodic (6) boundary condition

عندما $L \to \infty$، تؤول الفجوة بين القيم المناسبة المتتالية إلى الصفر، أى تصبح القيم المناسبة متصلة وليست متقطعة. بالعودة إلى المعادلة (٢-٩) يمكن رؤية أن الدوال المناسبة لهذا الوضع تأخذ الشكل

$$u_a(x) = e^{iax} \qquad (١٢-٢)$$

حيث تكون القيمة المناسبة a عبارة عن متغير متصل يأخذ أى مقدار.

من الأهمية بمكان ملاحظة أن القيم المناسبة تعتمد على شرط الحدود الموضوع على حلول معادلة القدر المناسب (٢-٧). ولذلك تُعَرَّف القيم المناسبة تعريفا جيدا[1] عند إعطاء شرط للحدود.

٢-٣ علاقات المبادلة[2]

أخيرا، نعتبر العملية المتتالية لمؤثرين. نُعَرِّف المُبَدِّل[3] لمؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ بالتعريف الآتى:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (١٣-٢)$$

وهذا عبارة عن الفرق بين التأثير أولا بالمؤثر $\hat{B}$ يليه $\hat{A}$، والتأثير أولا بالمؤثر $\hat{A}$ يليه $\hat{B}$. بوجه عام قيمة هذا المبدل لاتساوى صفرا،

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0 \qquad (١٤-٢)$$

لتوضيح ذلك نعتبر الحالة البسيطة التالية:

$$\hat{A} = x \quad ; \quad \hat{B} = \frac{\partial}{\partial x} \qquad (١٥-٢)$$

ومنه فلأى دالة $\psi(x)$ يكون

---

(1) well defined (2) commutation relations (3) commutator

$$\left[x,\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x)$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1-x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \qquad (٢-١٦)$$

حيث *الواحد* الذى بين القوسين يأتى نتيجة للتأثير بالمؤثر $\partial/\partial x$ على الدالة x، كما هو الحال فى المعادلة (٢-٣). نظرا لأن هذا يتحقق لأى دالة $\psi(x)$ فإننا نحصل على معادلة المؤثر

$$\left[x,\frac{\partial}{\partial x}\right]=-1 \qquad (٢-١٧)$$

المعادلة التى تعين قيمة المبدل لمؤثرين تسمى علاقة المبادلة. الحالة الخاصة التى فيها قيمة المبدل لمؤثرين عبارة عن عدد، كما هو الحال فى المعادلة (٢-١٧)، تلعب دورا هاما فى النظرية التى نحن بصدد تأسيسها.

٢-٤ ملخص

قدمنا سويا الآلة الحسابية التى سنحتاجها فى الباب القادم. هذه الآلة تتكون من قليل من التعريفات. لم نجد فى قيامنا بذلك عمليات حسابية أكثر تعقيدا من تفاضل حاصل ضرب دالتين. إلا أننا واجهنا هنا بعض الأفكار الجديدة. قبل البدء فى الباب الثالث (الذى يحتوى على كل التصورات الفيزيائية الجديدة اللازمة لتأسيس النظرية الأساسية الصالحة لوصف الأنظمة الذرية) ننصح القارىء بالتمشى مع الأفكار الحسابية التى أدخلناها فى هذا الباب.

نذكر هنا، وباختصار، الخواص الرئيسية للمؤثرات.

١- يصاحب كل مؤثر فئة من الأعداد، المسماة بالقيم المناسبة، التى تُعَرَّف بواسطة معادلة القيمة المناسبة (٢-٧).

٢- بوجه عام قيمة المبدل لمؤثرين لاتساوى الصفر،

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\neq 0$$

مسائل ٢

٢-١ حقق صحة معادلة المؤثر

$$\frac{\partial}{\partial x}x^n = n x^{n-1} + x^n\frac{\partial}{\partial x}$$

ومنه وضح أن

$$\left[\frac{\partial}{\partial x},x^n\right]=n x^{n-1}$$

٢-٢ أوجد قيمة

$$\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]$$

٢-٣ أثبت أن $u(x)=e^{-(1/2)x^2}$ هى الدالة المناسبة للمؤثر

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\right)$$

وأوجد القيمة المناسبة المناظرة.

٢-٤ حقق صحة معادلات المؤثرات الآتية:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2-1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2+1$$

الباب الثالث

ميكانيكا الكم

٣-١ عمليات الملاحظة[1] (القياس)

أدركنا مما سبق فشل الميكانيكا الكلاسيكية عند تطبيقها على الأنظمـة، بشرط أن تكون هذه الأنظمـة صغيرة بدرجـة كافيـة. تطبـق الميكانيكـا الكلاسيكية بنجاح لوصف حركـة الكواكـب والنجـوم فـى مداراتهـا، وأيضـا لوصف حركة كرة الجولف، مثلا، أو ماشابه ذلك. ولكنها تفشل تمامـا عند تطبيقها على الذرات. سوف يتضح فيما بعد عند دراسة الأنظمة الذريـة أن كلمة الصغر ترمى إلى المعنى المطلق للصغر، وليس مجرد صغر نسبى. فهم فحوى الصغر المطلق هو اللبنة الأساسية لفهم ميكانيكا الكم.

فـى فيزيـاء الأنظمـة الكلاسـيكية- أى الأنظمـة التـى تطبـق فيهـا التصـورات الكلاسيكية بنجـاح- يفـترض أن عمليـة الملاحظـة لاتُحْـدِث اضطرابا لحركة هذه الأنظمـة. علـى سبيل المثـال، عند تطبيق معادلات ماكسويل لحساب التيارات والمجالات فى مسألة ما يفترض عدم تـأثر القيم المحسوبة بعملية القياس، ولاحتى تؤثر عملية القياس علـى كيفيـة نمو هـذه التيارات والمجالات. وعلى وجه الدقة، نفرض أن الاضطـراب النـاتج من عملية القياس (مثل التغير فى قيمة التيـار نتيجـة لتوصيـل فولتميـتر) يمكـن تصحيحه بدقة، ذلك على الأقل من ناحية المبدأ.

من أبسط أنواع الملاحظة هو النظر إلى شيء معين . هذا يتطلب

(1) operations of observation

إسقاط أشعة ضوئية عليه، وهذا يعنى أننا نصدم الجسم المراد ملاحظته بالفوتونات. إذا كان المراد هو قياس موضع الجسم بدقة فهذا يستلزم أن يكون الطول الموجى للأشعة الساقطة صغيرا بدرجة كافية. وبالتالى يصبح تردد الفوتون، أو كمية حركته، أكبر من حد معين. أى صدمة بهذا الفوتون للنظام الملاحظ تُحْدِث له اضطرابا إذا كان صغيرا بدرجة كافية. من الممكن تصور أن هذه الاضطرابات نستطيع أيضا تصحيحها، إن لم يكن هذا هو الحال فإننا نجد أنفسنا أمام المعنى المطلق للحيز[1].

عبر ديراك[2] عن هذه الفكرة بدقة، حيث قال: *يوجد على وجه العموم حد للدقة فى قدرتنا على ملاحظة نظام ما وصغر الاضطراب المصاحب لتلك الملاحظة– هذا الحد ملازم لطبيعة الأشياء ولايمكن تجاوزه بتطور أساليب القياس.*

إذا كان النظام كبيرا بدرجة كافية لإهمال هذه الاضطرابات، عندها تطبق فروض الفيزياء الكلاسيكية ونتوقع أن يتبع النظام القوانين الكلاسيكية. من الناحية الأخرى، إذا كان قيمة الاضطراب الحادث فى النظام لايمكن إهمالها فإننا نقول أن هذا النظام صغير بمعناه المطلق، ومطلوب منا وضع نظرية جديدة للتعامل معه.

يبدو الدارس لميكانيكا الكم، إن لم نقل كالثور فى دكان للزجاجيات، فهو كرجل معصوب العينين، يسير فى دكان للزجاجيات، معرضا لتحطيم أى شيىء يلمسه فى محاولاته للتعرف بوضوح على طبيعة الأشياء الحساسة المحيطة به.

مشكلتنا الآن تكمن فى تأسيس نظرية فيزيائية جديدة من المعلومات المتجمعة، بواسطة طرق غير محددة بدقة. الشيىء المدهش هنا هو حقا

(1) size (2) Dirac

إمكانية عمل ذلك كلية، وليس اختلاف تلك النظرية فى جوهرها عن النظرية الكلاسيكية.

من أولى النقاط التى يجب اعتبارها هى خاصية تأثير عمليات الملاحظة على النظام الفيزيائى، وعليه توقع تجلى هذا التأثير بوضوح فى النظرية الجديدة.

تتمتع عمليات الملاحظة بالخاصيتين الآتيتين:

١- ينتمى لكل نوع من أنواع الملاحظة (كقياس الطاقة، كمية الحركة، الموضع، مثلا) فئة من الأعداد-النتائج الممكنة للملاحظة.

نعلم مسبقا، من مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين، أن هذه الأعداد ربما تقع فى مدى متصل، كما فى النظرية الكلاسيكية، أو تُكَوِّن فئة من القيم المتقطعة.

٢- نفرض نوعين من عمليات الملاحظة $\hat{A}, \hat{B}$ (مثلا $\hat{A}$ تعنى قياس الموضع، $\hat{B}$ تعنى قياس كمية الحركة). نرمز للملاحظة $\hat{B}$ المتبوعة بالملاحظة $\hat{A}$ بالرمز $\hat{A}\hat{B}$. وعليه فإن الرمز $\hat{B}\hat{A}$ يعنى نفس النوع من الملاحظة، ولكن بالترتيب العكسى.

نظرا لأن كل عملية قياس تسبب اضطرابا ما فى النظام الفيزيائى وبالتالى تؤثر على عملية القياس الأخرى، فإن العمليتين $\hat{A}\hat{B}$ ، $\hat{B}\hat{A}$ تظهران نتائج مختلفة. يعبر عن ذلك رياضيا كما يلى:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

قيمة التعبير السابق لابد أن يكون له علاقة بقيمة الاضطراب (الذى لايمكن تجنبه) الحادث.

عند هذه النقطة، وبهذا التحليل، نتوقع أن يدخل فى النظرية، التى نحن بصددها، ثابت ما جديد وذلك حتى نتمكن من إعطاء معناً كمياً[1] بدلا من المعنى الوصفى[2] للصغر المطلق. من خبرتنا بميكانيكا الكم القديمة نستطيع الجزم بأن هذا الثابت الجديد هو ثابت بلانك المختصر $\hbar$.

٢-٣ المؤثرات والملاحظات: الفروض التفسيرية[3]

يجب أن يلاحظ القارىء أن الخواص الفيزيائية لعمليات الملاحظة تناظر بالضبط الخواص الحسابية للمؤثرات التى قدمناها بالباب الثانى. فينتمى لكل منهما فئة من الأعداد، وكذلك فإن نتيجة التأثير بأى زوج من المؤثرات يجب أن تعتمد على ترتيب تطبيقها. لهذا فإننا نضع الفرض العام، وهو أن *عمليات الملاحظة تمثل بالمؤثرات* $\hat{A}$، حيث يوجد مؤثر واحد فقط لكل كمية نلاحظها (أى يوجد مؤثرللطاقة، وآخر للمكان، .... إلخ).

الدوال التى تعمل عليها المؤثرات تمثل حالة النظام وتعرف باسم دوال الحالة[4] (أو الدوال الموجية[5]). عندما تكون دالة الحالة هى دالة القيمة المناسبة فإننا نطلق عليها اسم حالة القيمة المناسبة[6].

إذا التزمنا جانب الدقة فإننا نضع الفروض التفسيرية (التى سنناقشها فيما

---

(1) quantitative (2) qualitative (3) interpretive postulates
(4) state functions (5) wave functions (6) eigenstate

بعد) الآتية:

ت(١): *النتائج الممكنة لعملية الملاحظة* $\hat{A}$ *هى القيم المناسبة* a_n.

ت(٢): *عملية الملاحظة* $\hat{A}$ *على نظام فى حالة القيمة المناسبة* $u_n(x)$ *تؤدى بالتأكيد إلى النتيجة* a_n.

ت(٣): *القيمة المتوسطة*[1] *لتكرار الملاحظة* $\hat{A}$ *على فئة من الأنظمة، كل نظام فى حالة اختيارية* $\psi(x)$ *، هى:*

$$\bar{a}_\psi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x)} \qquad (٣-١)$$

حيث $\psi^*(x)$ *هى الدالة المركبة المصاحبة للدالة* $\psi(x)$.

أول هذه الفروض لايمكن الاستغناء عنه، وذلك لأنه يجب أن نحدد بوضوح الأعداد المصاحبة للعملية A . هذه الأعداد تسمى ناتج عملية الملاحظة، وهى تناظر أيضا الأعداد المصاحبة للمؤثر المناظر $\hat{A}$.

أما من ناحية الفرض الثانى، فيوجد تناظر بين تكوين معادلة القدر المناسب (٢-٧) وبين عملية الملاحظة الفيزيائية المثالية. حيث نجد أن ناتج التأثير بالمؤثر $\hat{A}$ على نظام فى الحالة u_n هو أن تبقى الحالة u_n بدون تغيير مع تولد عدد a_n يمثل ناتج عملية الملاحظة.

فى الفرض الثالث نتعامل مع وضع أكثر صعوبة. إذا كان النظام فى حالة عامة $\psi(x)$ فطبقا للفرض الأول يكون نتيجة أى ملاحظة $\hat{A}$ هو ظهور أحد القيم المناسبة للمؤثر $\hat{A}$. تكرار الملاحظة $\hat{A}$ على فئة من الأنظمة

---

(1) average value

$\psi(x)$ ينتج عنه توزيع إحصائى[1] للقيم المناسبة المختلفة. ومن هنا فإن الفرض الثالث يحدد القيمة المتوسطة لهذا التوزيع الإحصائى. لابد أن يكون المتوسط عبارة عن عدد ما ناتج من التأثير بالمؤثر $\hat{A}$. زيادة على ذلك يجب أن يتوافق هذا المتوسط مع الفرض الثانى. ففى الحالة الخاصة التى فيها

$$\psi(x) = u_n(x)$$

وباستخدام المعادلة (٢-٧)، نحصل على

$$\bar{a}_{u_n} = \frac{\int u_n^*(x)\,\hat{A}(x, \partial/\partial x)\,u_n(x)dx}{\int u_n^*(x)\,u_n(x)dx} \qquad (٢-٣)$$

$$= \frac{\int u_n^*(x)\,a_n\,u_n(x)\,dx}{\int u_n^*(x)\,u_n(x)dx} = a_n \qquad (٣-٣)$$

وهذا هو المطلوب، نظرا لأن تكرار الملاحظات سوف يعطى دائما نفس النتيجة a_n. التعبير المعطى فى الفرض الثالث، المعادلة (٣-١)، يعد من أبسط التعبيرات التى تفى بمتطلبات التوافق بين الفرض الثانى والثالث.

٣-٣ الفروض الفيزيائية[2]

الفروض التفسيرية، المعطاة فى البند السابق، تضع الأساس لآلية التمثيل الحسابى للملاحظات الكمية- أى الملاحظات التى يلازمها اضطراب لايمكن تجنبه. أما الآن فنضع فرضين لكل منهما مضمون فيزيائى مباشر.

(1) statistical distribution (2) physical postulates

(أ) *مبدأ التناظر*[1]

من الواضح وجود شرط يجب على ميكانيكا الكم أن تستوفيه. فعند الحد الذى يصبح فيه النظام الملاحظ كبيرا وتتلاشى قيمة الاضطراب الحادث، يجب أن تؤول ميكانيكا الكم إلى الميكانيكا الكلاسيكية. لضمان تحقق ذلك نضع الفرض الفيزيائى الأول:

ف(١): *العلاقات الأساسية المحددة التى تربط المتغيرات الفيزيائية فى الميكانيكا الكلاسيكية، ولاتحتوى على تفاضلات، تتحقق أيضا للمؤثرات الكمية المناظرة.*

لهذا إذا كان $\hat{p}, \hat{x}$ هما مؤثرى الموضع وكمية الحركة الخطية، حينئذ يكون مؤثر المركبة-z لكمية الحركة الزاوية[2]، مثلا، هو

$$\hat{\ell}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \qquad (٣-٤)$$

ولجسيم بكتلة محددة m واقع تحت تأثير طاقة وضع كلاسيكية V(x) يكون مؤثر الطاقة[3] (المسمى بالهاميلتونى[4])، المعبر عنه بدلالة مؤثرى المكان وكمية الحركة الخطية، هو مجموع الحدود المعبرة عن طاقتى الحركة والوضع،

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \qquad (٣-٥)$$

وعلى وجه الخصوص فإن الهاميلتونى لمهتز توافقى كمى[5] تردده الزاوى

---

(1) correspondence principle (2) z-component of angular momentum operator (3) energy operator (4) Hamiltonian (5) quantum harmonic oscillator

ω، هو

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{x}^2 \qquad (٣-٦)$$

(ب) *مبدأ التتام*[1]

نعود الآن إلى الاعتبارات العامة المطروحة فى نهاية البند ٣-١ ونتداولها بطريقة أكثر دقة. إذا كان كل من $\hat{A}, \hat{B}$ يمثلان عمليات معينة من الممكن ملاحظتها. فإن الغير متساوية (٢-١٤) تعنى، من الناحية الفيزيائية، وجود اضطراب متبادل بين عمليتى الملاحظة $\hat{A}, \hat{B}$. الغير متساوية (٢-١٤) يجب أن تستبدل بمتساوية لأنواع معينة من الملاحظات.

فكرة الفوتون فى نظرية الكم القديمة والمفاهيم المعطاة بالبند ٣-١، تقترح علينا وجود ارتباط مباشر بين الاضطرابات المتبادلة عند قياس كل من الموضع وكمية الحركة، وأن هذا يجب أن يكون له علاقة بالمقدار الثابت $\hbar$. لهذا فإننا نفترض أن

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \propto \hbar \qquad (٣-٧)$$

حيث $\propto$ مجرد عدد مطلوب تعيينه.

أبسط تمثيل للمؤثر $\hat{x}$ هو وضعه فى صورة متغير جبرى عادى (هذا ليس بالتمثيل الوحيد) وعليه نستبدل $\hat{x}$ بالكمية x،

$$\hat{x} \rightarrow x \qquad (٣-٨أ)$$

من المعادلة (٢-١٧)، بالضرب فى $-\propto\hbar$، نجد

$$\left[x, -\propto\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right] = \propto\hbar \qquad (٣-٩)$$

---

(1) complementarity principle

وعليه فعند تمثيل $\hat{x}$ بالمعادلة (٣-٨ أ) فـإن المعادلـة (٣-٧) تسـتوجب أن يكون

$$\hat{p} \to -\propto \hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad (٣-٨ب)$$

وعندئذ تكون معادلة القدر المناسب (٢-٧) (مؤثر كميـة الحركـة $\hat{p}$ ينتمـى إليه القيمة المناسبة p) فى الصورة

$$\hat{p}\, u_p(x) = \left(-\propto \hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) u_p(x) = p\, u_p(x) \qquad (٣-١٠)$$

وعليه تصبح دوال القيم المناسبة على النحو

$$u_p = \exp\left[-\frac{p x}{\propto \hbar}\right] \qquad (٣-١١)$$

بوضع

$$\propto = \iota \qquad (٣-١٢)$$

نحصل على الجزء الفراغى[1] لمعادلـة دى برولـى (١-١٨)، حيـث تظهـر هذه المعادلة الآن تلقائيا كدالة حالة لجسيم يحمل كميـة حركـة محددة. تلـك هـى بـالضبط نـوع العلاقـة الجوهريـة المطلوبـة التـى تربـط بيـن الجسـيم والموجة.

عند هذا الحد نستطيع أن نُدْخِل الفرض الفيزيائى الثانى.

ف(٢):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \iota \hbar \qquad (٣-١٣)$$

وهذا يؤدى مباشرة (من المعادلتين (٣-٨ أ)، (٣-٨ب)) إلى التمثيل الهام

---

(1) space part

لهذه المؤثرات كما يلى:

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x} \rightarrow x\\&\hat{p} \rightarrow -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}} \qquad (٣-١٤)$$

وهو مايطلق عليه اسم تمثيل شرودنجر[1].

لوضع الفرض الثانى فى صورة أكثر عمومية فإننا نقول أن أى ملاحظة للموضع $\hat{\chi}$ وكمية الحركة المناظرة $\hat{\pi}$ يطلق عليها أنها متتامة، ويفترض فى المؤثرات المناظرة أن تحقق علاقة مبادلة شبيهة بالعلاقة (٣-١٣).

$$[\hat{\chi}, \hat{\pi}] = \iota\hbar$$

٣-٤ معادلة شرودنجر ومستويات الطاقة المتقطعة[2]

باعتبار كل من مبدأ التتام، ف(٢)، ومبدأ التناظر، ف(١)، والفرض التفسيرى الأول، ت(١)، (الذى ينص على أن القيم الممكنة لأى عملية ملاحظة تعطى بواسطة معادلة القدر المناسب) فإننا نصل إلى المعادلة التى تحدد القيم الممكنة لطاقة أى نظام. باستخدام تمثيل شرودنجر، نكتب مؤثر الطاقة كالآتى:

$$H(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{H}(x, -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x}) \qquad (٣-١٥)$$

وعليه تظهر معادلة القدر المناسب للطاقة على الصورة

---

(1) Schrodinger representation (2) Schrodinger equation and discrete energy levels

$$\boxed{\hat{H}(x, -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})u_E(x) = E\,u_E(x)} \qquad (٣-١٦)$$

وتلك هى معادلة شرودنجر.

لجسيم يتحرك على امتداد المحور-x تحت تأثير طاقة الوضع V(x)، تُختصر المعادلة (٣-١٦) إلى (أنظر المعادلة (٣-٥)):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)u_E(x) = E\,u_E(x) \qquad (٣-١٧)$$

التى تؤول، فى الأبعاد الثلاثة، إلى الشكل

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right)u_E(x,y,z) = E\,u_E(x,y,z) \qquad (٣-١٨)$$

يجب حل هذه المعادلة طبقا لشرط الحدود- وهو أن الدالة $u_E(x)$ محدودة فى الفراغ الكلى، وعلى وجه الخصوص محدودة عند مالانهاية. سنتناول شرط الحدود هذا بوضوح أكثر وكذلك معناه الفيزيائى فى الجزء الذى يلى المعادلة (٣-٣٨).

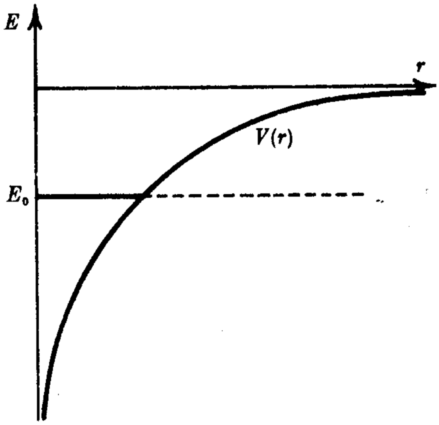
الحالة الخاصة، فى المعادلة (٣-١٨)، التى لها أهميتها هى تلك التى تُحَدَّد فيها قيم الطاقات المتاحة فى ذرة الهيدروجين. نعتبر أن البروتون ثابت فى مكانه، وباستخدام الإحداثيات القطبية الكروية[1] والتعويض عن V بطاقة الوضع الكولومية، تصبح المعادلة (٣-١٨) فى الصورة

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right)u_E(r,\vartheta,\varphi) = E\,u_E(r,\vartheta,\varphi) \qquad (٣-١٩)$$

---

(1) spherical polar coordinates

الاختبار الذى له أهمية قصوى لهذه النظرية يكمن فى أن المعادلة (٣-١٩) يجب أن تؤدى إلى مستويات الطاقات المتقطعة الملاحظة عمليا فى ذرة الهيدروجين. (هذه المسألة شبيهه بحركة الكواكب فى الميكانيكا الكلاسيكية). برهان ذلك يحتاج إجراءات حسابية صعبة، وسوف نؤجلها إلى الباب السابع. أما الآن فسوف نعتبر فقط نموذجا مبسطا للمسألة.



شكل ٣-١ منحنى طاقة الوضع الكولومية. المواضع المتاحة فيزيائيا لحركة جسيم كلاسيكى تقع فوق المنحنى V(r)، حيث المواضع أسفل المنحنى تناظر طاقة حركة سالبة.

منحنى الطاقة لذرة الهيدروجين موضح بشكل ٣-١. إذا كانت طاقة الحركة هى T والطاقة الكلية E_0، نجد

$$E_0 = T + V \qquad (٣-٢٠)$$

ولكن، كلاسيكيا $T \ge 0$ ، وعليه فإن الجسيم الذى طاقته E_o يتواجد فقط فى المناطق التى فيها قيم r تحقق شرط وقوع الخط المستقيم الذى معادلته $E = E_o$ أعلى المنحنى $E = V(r)$. الخط المتقطع يناظر قيم سالبة لطاقة الحركة، أى المواضع الغير متاحة فيزيائيا.

عندما يكون $E_o > 0$ ممكن للإلكترون أن يصل إلى مالانهاية. أما إذا كان $E_o < 0$ يكون الإلكترون مقيدا فى حركته. للقيم الكبيرة السالبة للطاقة، E_o، تصبح حركة الإلكترون مقيدة بمنطقة ضيقة ويتأثر الإلكترون بطاقة وضع سريعة التزايد.

لدراسة السمات الوصفية لمثل هذا النظام نحاول إيجاد قيم الطاقات الكمية لجسيم حركته محصورة فى بعد واحد داخل بئر جهد مربع لانهائى[1] مُعَرَّف بالمعادلة.

$$V(x) = 0 \quad , \quad |x| \le a$$
$$V(x) = \infty \quad , \quad |x| \ge a \qquad (٣-٢١)$$

على ذلك فإن (كلاسيكيا تنحصر حركة الجسيم فى المنطقة $|x| \le a$ مهما كانت قيمة طاقته) الجسيم يصدم جدران بئر الجهد ويرتد فى الاتجاه العكسى، وهكذا، ...

معادلة شرودنجر لهذا النظام هى المعادلة (٣-١٧) مع التعويض عن V من المعادلة (٣-٢١).

فى المنطقة $|x| \le a$، نحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x) = E_n u_n(x) \qquad (٣-٢٢)$$

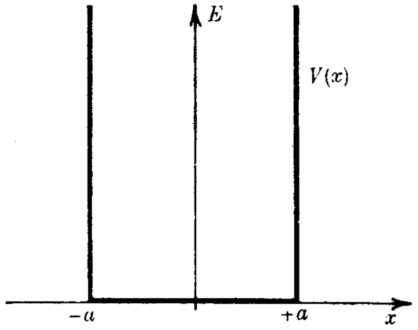
(1) infinite square well

أما فى المنطقة $|x| \ge a$ تؤول V إلى مالانهاية، أى تكون V عبارة عن كمية غير محددة، ولكن يبقى بمعادلة شرودنجر كميات أخرى محددة. عند هذه المرحلة نُدخل شرط الحدود الآتى:

$$u_n(x) = 0 \quad , \quad |x| \ge a \qquad (٣-٢٣)$$

بوضع

$$k_n^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (٣-٢٤)$$



شكل ٣-٢ منحنى الطاقة لبئر جهد مربع لانهائى فى بعد واحد. الجسيم حركته محصورة فى المنطقة $|x| \le a$.

تصبح المعادلة (٣-٢٢) على النحو

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_n^2\right) u_n(x) = 0 \qquad (٣-٢٥)$$

وحلولها التى تحقق شرط الحدود عند $x = a$ هى:

الحل

$$u_{2n}(x) = A \sin k_{2n} x \qquad (٣-٢٦)$$

حيث

$$a k_{2n} = 2n(\pi/2) \quad , \quad n = 1,2,\ldots \qquad (٣-٢٧)$$

والحل

$$u_{2n+1}(x) = B \cos k_{2n+1} x \qquad (٣-٢٨)$$

حيث

$$a k_{2n+1} = (2n+1)(\pi/2) \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (٣-٢٩)$$

من المعادلتين (٣-٢٧)، (٣-٢٩)، بالاستنباط الرياضى، نجد

$$k_n = \frac{\pi}{2a} n \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

وباستخدام المعادلة (٣-٢٤)، نجد أن مستويات الطاقة المتاحة هى

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2}{4a^2}\right)n^2 \qquad (٣-٣٠)$$

هذه المعادلة تعنى أن السمات الأساسية لأطياف الطاقات المتقطعة قد ظهرت بصورة تلقائية فى هذه الصياغة. يجب علينا مقارنة النتيجة الحاصلين عليها مع معادلة بوهر المحددة لمستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين، وهى

$$E_n^{(H)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a_o^2}\frac{1}{n^2} \qquad (٣-٣١)$$

مع بدائية النموذج المستخدم للحصول على المعادلة (٣-٣٠) فإن التشابه بين المعادلتين يدعو للدهشة. فعدم الاتفاق فى المعامل π نشأ من تقريب المسألة إلى بعد واحد بدلا من الثلاث أبعاد. أما الاختلاف فى الإشارة فقد نتج من حقيقة أننا فى حالة الهيدروجين نقيس المستويات من قمة بئر الجهد إلى أسفل، أما لبئر الجهد المربع فإننا نقيس من القاع إلى القمة.

بهذا نكون قد أعدنا صياغة نظرية الأنظمة الذرية، التى بنيت فيزيائيا على أساس فكرة بلانك عن الفوتونات ومضمون الحد الأدنى للاضطرابات المصاحبة لعمليات الملاحظة. ظهر أيضا على السطح موجات دى برولى بوصفها دوال مناسبة للجسيمات المتحركة بكمية حركة محددة.

فى صياغتنا هذه لم نتوصل بشكل صريح إلى مستويات بوهر لذرة الهيدروجين، إلا أنه بالتطبيق المباشر للنظرية الجديدة محتسبين النموذج البدائى (بئر الجهد المربع اللانهائى) أظهرنا السمات الرئيسية التى تصف أطياف ذرة الهيدروجين، وكان أهم مافى الأمر بالطبع هو الصورة المتقطعة للطيف.

٣-٥ دوال الحالة وتكامل التطابق[1]

$\psi(x)$

نعود الآن إلى دوال الحالة ومعناها الفيزيائى. أول مانلاحظه هو أن الخواص الفيزيائية المذكورة حتى الآن (الفروض التفسيرية ت(١)، ت(٢)، ت(٣)) لاتتغير من جراء ضرب دالة الحالة المعطاة فى أى مقدار ثابت. لتحديد اختيار هذا الثابت وجد أنه من الأنسب إدخال شرط التسوية[2]

$$\int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \qquad (٣٢-٣)$$

حيث يجرى التكامل على كل القيم المتاحة للمتغير x. لذلك إذا كانت دالة الحالة لجسيم، كمية حركته p، هى موجة دى برولى

$$u_p(x) = Ce^{ipx/\hbar}$$

---

(1) overlap integral (2) normalization condition

وكانت حركة الجسيم محصورة فى المنطقة

$$0 \le x \le L$$

فإن شرط التسوية يصبح

$$\int_0^L \left|C e^{\iota p x/\hbar}\right|^2 dx = 1$$

ومنه

$$|C|^2 = L^{-1}$$

وتبدو دالة الحالة المسواة[1] فى الشكل

$$u_p(x) = \frac{1}{L^{1/2}} e^{\iota p x/\hbar} \qquad (٣-٣٣)$$

لدوال الحالة المسواة يؤول التعبير (٣-١)، الذى يحدد القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظات $\hat{A}$، إلى الصورة المبسطة

$$\bar{a}_\psi = \int \psi^*(x) \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x) dx \qquad (٣-٣٤)$$

ومنه فإن القيمة المتوسطة لكمية الحركة الملاحظة، مثلا، تساوى

$$\bar{p}_\psi = \int \psi^*(x) \left(-\iota \hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) dx \qquad (٣-٣٥)$$

بتطبيق المعادلة (٣-٣٤) على الحالة الخاصة التى فيها

$$\hat{A} = \hat{x} \qquad (٣-٣٦)$$

نحصل على القيمة المتوسطة للموضع، وهى

$$\hat{x} = \int dx\, x |\psi(x)|^2 \qquad (٣-٣٧)$$

---

(1) normalized state function

نظرا لأن الكمية $|\psi(x)|^2$ تمثل معامل وزن[1] (إحصائى) ملائم للموضع x عند حساب المتوسط فهذا يعنى أنه عند إجراء القياس مره واحدة فقط لموضع جسيم فى الحالة $\psi(x)$ فإن احتمال أن تكون نتيجة عملية القياس هى القيمة x نفسها يساوى

$$P_\psi(x) = |\psi(x)|^2 \qquad (٣٨-٣)$$

وعليه فإن التفسير الفيزيائى المباشر لدالة الحالة هو أن مربع قيمتها المطلقة يعطىالكثافة الاحتمالية[2] للجسيم فى الفراغ. شرط التسوية يؤكد أن الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فى الفراغ الكلى لابد أن يساوى الواحد الصحيح، وأن النظرة الأكثر عمومية لشرط الحدود الموضوع على أى دالة حالة هو لضمان تَحقُّق تسوية هذه الدالة.

يجب ملاحظة أن الاحتمال النسبى[3] لتواجد جسيم عند موضعين مختلفين لايعتمد على ثابت التسوية، حيث يختصر هذا الثابت عند أخذ النسبة. فى كثير من الأوضاع الفيزيائية، كدراسة مبدأ عدم التحديد، مثلا، الذى سيأتى ذكره فى البند التالى، تكون الاحتمالات النسبية هى التى لها أهميتها فقط ولذلك لاتستدعى الضرورة وضع ثابت تسوية الدالة الموجية.

السؤال الذى يطرح نفسه الآن هو: بمعلومية دالة الحالة العامة $\psi(x)$، ماهو احتمال أن يتمخض عن عملية الملاحظة $\hat{A}(x,\partial/\partial x)$ النتيجة a_n؟ فى حقيقة الأمر هذا السؤال نستطيع إجابته من الفروض التى وضعناها من قبل، وهذا ما قمنا به بالفعل فى الباب الثانى عشر. سنكتفى هنا بذكر النتيجة فقط وجعلها مقبولة فيزيائيا.

---

(1) weighting factor (2) probability density (3) relative probability

لو حدث أن كانت دالة الحالة $\psi(x)$ هى دالة الحالة المناسبة المنتمية للقيمة المناسبة a_n، أى أن

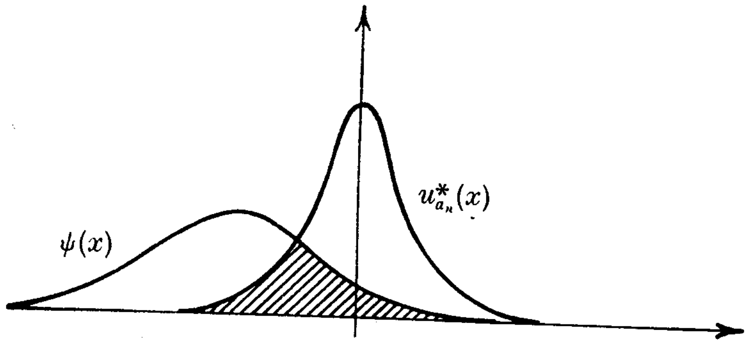
$$\psi(x) = u_{a_n}(x)$$

فإن الاحتمال، حينئذ، يساوى الوحدة. بوجه عام يجب أن يكون لقيمة الاحتمال علاقة بمدى التشابه بين دالة الحالة العامة $\psi(x)$ ودالة القيمة المناسبة $u_{a_n}(x)$. نعبر عن هذا التشابه رياضيا بالتكامل

$$\int dx\, u_{a_n}^{*}(x)\psi(x)$$

وهذا هو تكامل التطابق. تمثل قيمة هذا التكامل بعدد، وهذا العدد يساوى الواحد الصحيح فى الحالة الخاصة السابقة. تقترب قيمة العدد من الوحدة عندما تكون الدالتان $\psi(x), u_{a_n}(x)$ متشابهتين تقريبا (تطابق كبير). يصبح هذا العدد صغيرا جدا فى حالة ما يكون التطابق بين الدالتين صغيرا جدا هو الآخر (انظر شكل ٣-٣).

يجب أن يكون الاحتمال الذى نبحث عنه حقيقيا، وهذا يتحقق بأخذ مربع



شكل ٣-٣ تكامل تطابق الدالتان $\psi(x), u_{a_n}(x)$ يأتى من المنطقة المظللة التى فيها كلا المعاملين لايساوى الصفر.

القيمة المطلقة لتكامل التطابق. إذا الاحتمال المطلوب هو

$$P_\psi(a_n) = \left|\int dx\, u^*_{a_n}(x)\psi(x)\right|^2 \qquad (٣-٣٩)$$

تحتوى دالة الحالة $\psi(x)$ على كل المعلومات الممكن معرفتها عن النظام تحت الدراسة بالتوافق مع الاضطرابات المتبادلة نتيجة لعمليات الملاحظة. نظرا للتأثير العشوائى لهذه الاضطرابات فإن بعض هذه المعلومات تُقَيَّم بطرق إحصائية. فى حالة عدم إجراء أى قياسات (ملاحظات) على اللأنظمة فلايحدث لها أى اضطراب عشوائى، وبالتالى تنمو الأنظمة مع مرور الزمن طبقا لمعادلات حركة تفاضلية، وسوف نتعرض لمثل هذه الأحوال فى الباب الثالث عشر.

من المعتاد حصر تفكيرنا فى دوال الحالة على أنها واصفة للأنظمة الفيزيائية الفعلية. وفى بعض الأحيان من المهم تذكر أن هذه الدوال تصف بالتحديد حالة مثالية من المعلومات عن النظام تحت الدراسة. لذلك إذا قمنا، مثلا، بقياس طاقة نظام فى الحالة $\psi(x)$ فإن ناتج عملية القياس يجب أن تكون إحدى القيم المناسبة E_n. ينتج عن عملية القياس تغيرا فجائيا فى الحالة التى تحدد معلوماتنا عن النظام، ومع ذلك يوصف النظام، بطريقة مثالية، بواسطة دالة الحالة المناسبة $u_{E_n}(x)$ المناظرة للقيمة المناسبة E_n.

٣-٦ مبدأ عدم التحديد[1]

آخر النقاط التى سنتداولها فى هذا الباب الأساسى هو الوضع القائم فى نهاية البند ٣- ٣ ، ألا وهو علاقة المبادلة (٣-١٣) . حيث عدم مساواة

(1) uncertainty principle

$[\hat{x},\hat{p}]$ بالصفر يؤكد وجود الاضطرابات المتبادلة بين هذين النوعين من الملاحظات.

لتوضيح ذلك، نعتبر دالة الحالة

$$\psi(x) = \exp[-x^2/2\Delta_x^2] \qquad (٣-٤٠)$$

(هذه الدالة ليست مسواة وعملية التسوية لن تؤثر على النتائج المطلوبة، كما ذكرنا سابقا.)

من المعادلة (٣-٣٨)، دالة الكثافة الاحتمالية النسبية تساوى

$$P_\psi(x) = |\psi(x)|^2 = \exp[\mp x^2/\Delta_x^2] \qquad (٣-٤١)$$

وهى تمثل تحدب جاوسى[1] نصف عرضه يساوى Δ_x، انظر شكل ٣-٤. لهذا فإن $\psi(x)$ تعبر عن جسيم غالبا مايتواجد بالتحديد داخل مسافة Δ_x مقاسة من نقطة الأصل.

عند القيام بعملية قياس كمية الحركة فإن احتمال الحصول على النتيجة p يعطى بدلالة تكامل التطابق (٣-٣٩). نرمز لهذا التكامل بالرمز $\phi(p)$، إذا

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_p^*(x)\psi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\iota px/\hbar}\psi(x)\,dx \end{aligned} \qquad (٣-٤٢)$$

واحتمال أن تساوى كمية الحركة المقدار p ، هو

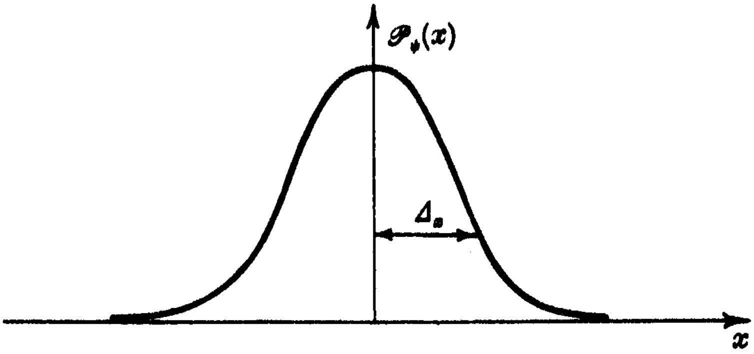
$$P_\psi(p) = |\phi(p)|^2 \qquad (٣-٤٣)$$

نظرا للتشابه بين المعادلتين (٣-٤٣) ، (٣-٣٨) فإننا نسمى $\phi(p)$ بدالة

---

(1) Gaussian hump

الحالة فى فراغ كمية الحركة[1]. بالتعويض عن $\psi(x)$ من المعادلة (٣-٤٠) فى المعادلة (٣-٤٢) نحصل على



شكل ٣-٤ التوزيع الاحتمالى المناظر لدالة الحالة (٣-٤٠). غالبا مايتواجد الجسيم بالتحديد داخل مسافة Δ_x مقاسة من نقطة الأصل.

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\iota p x}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right] dx$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta_x} + \frac{\iota p \Delta_x}{\hbar}\right)^2\right] dx\right\} \exp\left[-\frac{p^2 \Delta_x^2}{2\hbar^2}\right]$$

بوضع

$$y = \frac{x}{\Delta_x} + \frac{\iota p \Delta_x}{\hbar} \qquad (٣-٤٤)$$

فإن التكامل يصبح

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right] dy$$

---

(1) momentum space

من المعلوم أن هذا التكامل يؤول إلى مقدار ثابت. من الأنسب احتواء هذا المقدار الثابت (ناتج إجراء التكامل) أثناء عملية تسوية الدالة الموجية، أى احتوائه داخل ثابت التسوية، ونكتب $\phi(p)$ كما يلى:

$$\phi(p) = \exp[-p^2 \Delta_x^2 / 2\hbar^2] \tag{٣-٤٥}$$

عند تعريف Δ_p بالعلاقة

$$\Delta_x \Delta_p = \hbar \tag{٣-٤٦}$$

تؤول $\phi(p)$ إلى

$$\phi(p) = \exp[-p^2 / 2\Delta_p^2] \tag{٣-٤٧}$$

هذه الدالة توضح (بالتشابه الدقيق مع $\psi(x)$) أن الجسيم غالبا مايحمل بالتحديد كمية حركة تختلف عن الصفر بما لايزيد عن المقدار Δ_p.

العلاقة (٣-٤٦) التى تربط بين عدم التحديد فى قياس الموضع، Δ_x، وعدم التحديد فى قياس كمية الحركة Δ_p، تعد نتيجة مباشرة لعلاقة المبادلة (المعادلة (٣-١٣)) بين $\hat{p}, \hat{x}$. وضع التساوى بالمعادلة (٣-٤٦) يرتبط بالشكل الجاوسى المختار لدالة الحالة، وذلك لتسهيل الحسابات. الصورة العامة (التى تطبق على أى دالة حالة) التى نعين منها موضع الجسيم فى الحدود Δ_x وكمية حركته فى الحدود Δ_p هى

$$\Delta_x \Delta_p \geq \hbar \tag{٣-٤٨}$$

هذه العلاقة تعرف بمبدأ عدم التحديد. وهى تعبر بدقة أكبر عن الاضطرابات بين المتغيرات المتتامة. لقيم صغيرة للكمية Δ_x تصبح الدقة فى قياس الموضع كبيرة، وفى نفس الوقت يكبر الاضطراب الحادث فى كمية الحركة p وهذا بدوره يؤدى إلى كبر مدى عدم التحديد Δ_p. أما النهاية الصغرى لحاصل ضرب الكميتين Δ_x، Δ_p فإنها تحدد بثابت بلانك.

مر علينا من قبل أحد الحالات القصوى لهذا المبدأ التى سوف نذكرها الآن بشىء من التفصيل. المعادلة (٣-٣٣) تعين دالة الحالة (موجة دى برولى) لجسيم كمية حركته p. هذه الدالة مسواة بالطريقة التى تجعل الجسيم متواجد على امتداد طول (كبير) L. هذا يعنى أن p تكون معروفة بالضبط، وبطريقة أخرى نقول أن

$$\Delta_p = 0 \qquad (٣-٤٩)$$

الكثافة الاحتمالية للموضع تساوى

$$P_{u_p}(x) = |u_p(x)|^2 = \frac{1}{L} \qquad (٣-٥٠)$$

نظرا لأن الاحتمال لايعتمد على قيمة x فهذا يدل على تساوى احتمالات تواجد الجسيم عند شتى المواضع. وعندما تؤول L إلى مالانهاية، نجد أن

$$\Delta_x \to \infty \qquad (٣-٥١)$$

متفقا مع مبدأ عدم التحديد.

من المعتاد توجيه قدر كبير من الأهمية نحو مبدأ عدم التحديد، إلا أن هذا المبدأ يعد من البنود السلبية نظرا لأنه يعبر عن القيود المفروضة على مدى معرفتنا للمعلومات عن نظام معين. ذلك بالطبع بسبب الاضطرابات المتبادلة الناشئة عن عمليات الملاحظة. بوجه عام، إذا كان هناك نوعان من الملاحظات $\hat{B},\hat{A}$، وكان

$$[\hat{A},\hat{B}] \neq 0 \qquad (٣-٥٢)$$

فإن الاضطرابات المتبادلة تمنعنا من الحصول على معلومات دقيقة للملاحظتين فى آن واحد. أما إذا كان

$$[\hat{A},\hat{B}] = 0 \qquad (٣-٥٣)$$

فهذا يعنى عدم وجود اضطرابات متبادلة بين الملاحظتين، وأنه يمكن الحصول على نتائج دقيقة للملاحظتين فى آن واحد.

مثلا، نفرض أننا نريد معرفة كمية الحركة والطاقة لجسيم حر حينئذ يكون

$$\hat{A} = \hat{p} \rightarrow -\iota\hbar\partial/\partial x \qquad (٣-٥٤)$$

$$\hat{B} = \hat{H} \rightarrow \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\partial^2/\partial x^2 \qquad (٣-٥٥)$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned}\left[\hat{p},\hat{H}\right] &= \left[-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \\ &= \frac{\iota\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0\end{aligned} \qquad (٣-٥٦)$$

هذه المعادلة عبارة عن معادلة مؤثر، وكما نرى نجد فيها أن المؤثر التفاضلى داخل القوسين يعطى قيمة مساوية للصفر عند التأثير به على أى دالة حالة $\psi(x)$. وعليه يمكن معرفة قيم دقيقة عن الطاقة وكمية الحركة لجسيم حر فى آن واحد. لتوضيح ذلك، رياضيا، معلوم لدينا أن دالة الحالة المناسبة لأى كمية حركة معطاة p هى موجة دى برولى

$$u_p = e^{\iota px/\hbar} \qquad (٣-٥٧)$$

إذا

$$\begin{aligned}\hat{H}u_p &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{\iota px/\hbar} = \frac{p^2}{2m}u_p \\ &= E u_p\end{aligned} \qquad (٣-٥٨)$$

معنى ذلك أن u_p هى أيضا دالة قيمة مناسبة للطاقة، وينتمى إليها القيمة المناسبة E

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad (٣-٥٩)$$

يجب ملاحظة أنه لايمكن معرفة كل من الطاقة وكمية الحركة، فى آن واحد، لجسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع V(x). لهذا الوضع يكون

$$\left[\hat{H}, \hat{p}\right] \neq 0$$

نظرا لأن

$$[V(\hat{x}), \hat{p}] \neq 0$$

ولذلك إذا علمنا قيمة الطاقة بالضبط، لتلك الحالة، فلايمكن تحديد قيمة كمية الحركة، ولكن نعين فقط القيمة المتوسطة لها باستخدام الفرض التفسيرى ت(٣). العكس أيضا صحيح، بمعنى أنه إذا علمنا كمية الحركة بالضبط فإننا نستطيع فقط معرفة القيمة المتوسطة للطاقة.

عندما يكون النظام كبيرا لدرجة تمكننا من إهمال $\hbar$ تصبح كل المؤثرات متبادلة مع بعضها البعض. وعندها نستطيع إجراء كل القياسات دون حدوث اضطرابات متبادلة. ومن ثم تُمثل كل المؤثرات بمتغيرات جبرية عادية. فى تلك الحال يضمن لنا مبدأ التناظر أن العلاقات المحددة بين هذه المتغيرات، كالعلاقة بين الطاقة وكمية الحركة، ....، إلخ، تؤول إلى نفس العلاقات الميكانيكية الكلاسيكية. (سنرى فى الباب الثالث عشر أن هذا هو الحال أيضا بين العلاقات التى تحتوى على تفاضلات بالنسبة للزمن.)

الفكرة الأخيرة التى نود تأكيدها فى نهاية هذا الباب هى أنه فى كل المناقشات السابقة كان التمييز بين الأنظمة الصغيرة والأنظمة الكبيرة (الأنظمة الكمية والأنظمة الكلاسيكية) لايتم على أساس الامتداد الفراغى

فقط، ولكن أيضا يتم على أساس وحدات $\hbar$. الكمية $\hbar$ لها وحدات الفعل[1] (ML^2T^{-1}) ، أى أن $\hbar$ تكافىء

(طول) × (كمية حركة خطية)

أو

(زمن) × (طاقة)

وأنه بدلالة الفعل النموذجى[2] نتعرف على النظام صغيرا كان أم كبيرا.

على سبيل المثال، لإلكترون داخل ذرة ما يكون الفعل النموذجى هو حاصل ضرب نصف قطر بوهر ويساوى ~ 10^{-8} cm فى كمية الحركة الخطية للإلكترون بهذا المدار (= 10^{-19} cgs) (انظر المسألة ١-٢). فى هذا الوضع حاصل الضرب يتقارب من مقدار $\hbar$ وعليه يكون تطبيق ميكانيكا الكم ضروريا فى دراسة هذه المسألة.

من الناحية الأخرى، نرى أن كثيرا من المواضع فى علم الإلكترونيات تكون المسافات فيها فى حدود المقدار 10^{-2} cm والجهود حوالى عدة عشرات فولت، أى أن كميات الحركة فى الحدود 10^{-21} cgs $\approx$ 10 eV/c، وبالتالى تتقارب قيمة الفعل من المقدار 10^{-23} cgs. هذا يعنى إمكانية دراسة هذه المسائل كلاسيكيا دون افتقاد الدقة المطلوبة. يوجد فى علم الإلكترونيات بعض الحالات الشاذة التى فيها لايمكن إهمال قيمة $\hbar$، وعليه يكون للتأثيرات الكمية أهمية كبيرة فى تقييم الظواهر. تعد ظاهرة ثنائى النفق[3] خير مثال على ذلك، حيث تخترق الإلكترونات حواجز جهد أكبر من قيمة الطاقة الحاملة لها ولانستطيع تفسير ذلك إلا بطريقة كمية بحته. سوف نتعرض لهذه الفكرة فى نهاية البند ٤-١، بالباب الرابع.

---

(1) action (2) typical action (3) tunnel diode

٣-٧ ملخص

بهذا نكون قد أكملنا تأسيس النظرية الميكانيكية الكمية. ماسبق من بنود يحتوى على عدد كبير من التصورات الجديدة التى تبدو لأول وهلة محيرة. الطريقة الوحيدة للتغلب على هذه الحيرة هى مداومة استخدامنا لهذه الصياغة الجديدة حتى نصل إلى الألفة معها.

كما ذكرنا فى بداية هذا الباب، فإننا قدمنا نظرية لنوع جديد تماما من المعلومات. الفرض الذى نفهمه ضمنيا فى الفيزياء الكلاسيكية (وهو ملاحظة الأشياء دون إحداث اضطراب لها) يعد من المفاهيم السائدة فى حياتنا اليومية، وعلى وجه الخصوص فى حالة المعلومات التى ندركها بالعين المجردة. فعقولنا تعودت على التعامل مع المعلومات المتجمعة بهذه الطريقة. تعتبر القفزة الفكرية المطلوبة لتدريب أنفسنا على التعامل مع هذا النوع الجديد من المعلومات الكمية هى الصعوبة الرئيسية للوصول إلى فهم مبدئى لميكانيكا الكم.

فيما يلى نضع باختصار الخطوات فى هذا الاتجاه:

١- فكرة الفوتون تؤدى إلى اضطرابات، لايمكن تجنبها، تصاحب عمليات الملاحظة. الأنظمة الكمية هى التى تتأثر بعملية الملاحظة.

٢- يجب أن تظهر بوضوح عمليات الملاحظة فى النظرية. الملاحظات الكلاسيكية مثل ملاحظة الطاقة، H، وكمية الحركة، p، والموضع، x، تستبدل بالمؤثرات الكمية $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$. تتشابه العلاقات المحددة بين هذه المتغيرات فى الميكانيكا الكلاسيكية والكمية (مبدأ التناظر، ف(١)).

٣- القيم الممكنة لملاحظة $\hat{A}$ هـى القيم المناسبة a التـى تعطـى من معادلة القيمة المناسبة

$$\hat{A}\,u_a(x) = a\,u_a(x)$$

التى تعنـى أن عملية القياس على نظام فـى الحالة المناسبة $u_a(x)$ تؤدى بالتحديد إلـى النتيجة a (ت(١)، ت(٢)). تُحَل معادلة القدر المناسب مرتبطة بشرط الحدود. شرط الحدود يعنـى أن دالة الحالة يمكن تسويتها على النحو

$$\int |u(x)|^2\, dx = 1$$

٤- القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظات $\hat{A}$ على نظام فـى حالة اختيارية $\psi(x)$ (الدالة مسواة) هى، (ت(٣)):

$$\bar{a}_\psi = \int \psi^*(x)\,\hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x})\psi(x)dx$$

عند تطبيق ذلك على عملية قياس الموضع يؤدى إلـى أن احتمال أن يكون الجسيم عند الموضع x يساوى

$$P_\psi(x) = |\psi(x)|^2$$

عملية التسوية تضمن أن الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فـى منطقة معينة يساوى الوحدة.

٥- احتمال أن يكون نتيجة الملاحظة $\hat{A}$ على نظـام فـى الحالـة $\psi(x)$ هى القيمة a يساوى

$$P_\psi(a) = \left|\int u_a^*(x)\psi(x)dx\right|^2$$

والتكامل بالداخل يطلق عليه اسم تكامل التطابق.

٦- يقاس الاضطراب المتبادل بين ملاحظات المتغيرات المتتامة بثابت بلانك، $\hbar$، ويعبر عن ذلك بالعلاقة (ف(٢)):

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \iota\hbar$$

هذا يؤدى مباشرة إلى تمثيل شرودنجر لتلك المؤثرات على النحو:

$$\hat{x} \to x$$

$$\hat{p} \to -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

وهذا بدوره يؤدى إلى أن الحالة المناسبة الواصفة لجسيم يحمل كمية حركة محددة، p، هى موجة دى برولى،

$$u_p(x) = e^{\iota px/\hbar}$$

٧- باستبدال كل من $\hat{x}, \hat{p}$ بتمثيل شرودنجر لها والتعويض فى معادلة القيمة المناسبة للطاقة، $H(\hat{x}, \hat{p})$، نحصل علىمعادلة شرودنجر لمستويات الطاقات الممكنة لنظام معين،

$$\hat{H}(x, -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})u_E(x) = E\,u_E(x)$$

بتطبيق ذلك على ذرة الهيدروجين يتولد بنجاح مستويات بوهر للطاقة.

٨- علاقة المبادلة بين مؤثرين، $[\hat{x}, \hat{p}]$، فى الفقرة السادسة تؤدى إلى علاقة عدم التحديد بين الموضع وكمية الحركة، وهى

$$\Delta_x \Delta_p \geq \hbar$$

مسائل ٣

٣-١ يتحرك جسيم داخل بئر جهد مربع لانهائى تحت تأثير طاقة الوضع المعطاة بالمعادلة (٣-٢١). وعدم التحديد فى قياس موضعه يساوى

$$\Delta_x = 2a$$

يجب أن تكون قيمة كمية الحركة مساوية على الأقل لعدم التحديد فى قياسها. وضح أن تقدير طاقة الحالة الأرضية، على أساس مبدأ عدم التحديد، يعطى بالمعادلة

$$E_1 \approx \frac{\hbar^2}{8\,m\,a^2}$$

قارن هذه النتيجة بالقيمة المضبوطة الحاصلين عليها من معادلة القدر المناسب.

٣-٢ باستخدام تمثيل شرودنجر للمؤثرات (٣-١٤)، وضح أن

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = -\iota\hbar \frac{\partial V(\hat{x})}{\partial \hat{x}}$$

(هذا بمثابة تعميم مباشر للفكرة التى أدت إلى المعادلة (٢-١٧))

٣-٣ بمعلومية

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 a} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$$

إستنتج المعادلة (٣-٤٥) من المعالة (٣-٤٠)، مع الوضع فى الاعتبار لثوابت التسوية.

٣-٤ تعطى دالة الحالة (الغير مسواة) لجسيم يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم بالمعادلة

$$\psi(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta^2} + \iota\frac{p\,x}{\hbar}\right]$$

وضح أن القيمة المتوسطة لقياس كمية الحركة تساوى p، وأن عدم التحديد فى قياس موضع الجسيم يقع فى حدود المقدار Δ. باعتبار دالة الحالة فى

فراغ كمية الحركة، وضح أن قيمة كميــة الحركـة لاتختلـف عـن المقدار p بأكثر من القدر $\hbar/\Delta$.

٣-٥ يتحرك جسيم داخل بئر جهد مربع لانهائى تحت تـأثير طاقـة الوضـع المعطاة بالمعادلة (٣-٢١). إذا كانت حالة الجسيم تعطى بالدوال

$$\psi(x) = x \quad , \quad |x| \le a$$
$$\psi(x) = 0 \quad , \quad |x| > a$$

أوجد الاحتمال النسبى لكون قياس الطاقة يعطى النتيجة E_4, E_2.

٣-٦ جسيم كمى يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم، ودالة حالته هى

$$\psi(x) = (1/2a)^{1/2} \quad , \quad |x| \le a$$
$$\psi(x) = 0 \quad , \quad |x| > a$$

أوجد احتمال (عملية التسوية اختيارية) أن يتواجد الجسيم حاملا كمية حركة مقدارها p. إرسم رسما تقريبيا للتوزيع الاحتمالى لكميـة الحركـة ثم نـاقش هذا بالربط بين التوزيع الفراغى المناظر ومبدأ عدم التحديد.

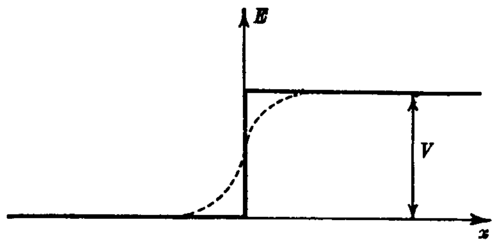
وضح أن الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم حـاملا كميتـى حركـة مسـاوية $\pi\hbar/2a$ ، صفر يساوى $4/\pi^2$.

الباب الرابع

الحركة فى بعد واحد[1]

٤-١ خطوة الجهد[2]

قبل دراسة النظرية الكمية للمهتز التوافقى[3] ولذرة الهيدروجين يجدر بنا البدء بالمقارنة بين الاقتراحات الكلاسيكية والكمية لنماذج بسيطة فى بعد واحد.



شكل ٤-١ منحنى الطاقة لخطوة الجهد. المنحنى المتقطع يمثل الوضع الحقيقى. الخط المتصل يمثل الوضع المثالى بغرض تسهيل الحسابات.

من أبسط الأنظمة حركة جسيم تحت تأثير طاقة الوضع الممثلة بالخط المتقطع، شكل ٤-١. نظرا لأن القوة F(x) تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (٤-١)$$

فإن الجسيم سوف يتحرك بحرية فى كل مكان ، ماعدا بالقرب من نقطة

---

(1) one dimensional motion (2) potential step (3) harmonic oscillator

الأصل حيث فى هذه المنطقة يتعرض لقوة تتجه ناحية اليسار. على فرض أن الطاقة الكلية للجسيم هى E_0 وطاقة حركته T، فإننا نجد

$$E_0 = T(x) + V(x) \qquad (٢-٤)$$

من الأنسب البدء بدراسة الحالتين الآتيتين من الوجهة الكلاسيكية:

(أ) $E_0 > V$ *(كلاسيكيا)*

الجسيمات القادمة من جهة اليسار تقترب من حاجز الجهد حاملة طاقة حركة T_0 وكمية حركة p_0 مرتبطة بالعلاقة

$$T_0 = E_0 = \frac{p_0^2}{2m}$$

أثناء تخلل الجسيمات لحاجز الجهد تعمل القوة F(x) على إبطاء حركتها، وبالتالى يتحول جزء من طاقة حركة الجسيمات إلى طاقة وضع. وحيث أن الطاقة الكلية للجسيمات أكبر من حاجز الجهد فإن جزءا من هذه الطاقة، مساوٍ لحاجز الجهد، يستنفذ فى التغلب على القوة العكسية الناشئة من حاجز الجهد وتخرج الجسيمات حاملة طاقة حركة T_1 تعطى بالمقدار

$$T_1 = \frac{p_1^2}{2m} = E_0 - V \qquad (٣-٤)$$

وهذا يعنى النفاذ الكلى للجسيمات.

(ب) $E_0 < V$ *(كلاسيكيا)*

فى هذا الوضع تستنفذ كل طاقة الجسيمات القادمة من جهة اليسار بداخل حاجز الجهد وتتوقف عند النقطة x' ، مثلا، حيث

$$V(x') = E_0 \quad ; \quad [T(x') = 0] \qquad (٤-٤)$$

عند هذه النقطة تعكس الجسيمات اتجاه حركتها تحت تأثير القوى العكسية، وعليه يحدث انعكاس تام للجسيمات.

يجب ملاحظة أن السمات الوصفية للحركة الكلاسيكية لاتتغير باستبدال حاجز الجهد الممثل بالخط المتقطع بخطوة الجهد المفاجئة الممثلة بالخط المتصل، شكل ٤-١. تعد هذه المسألة من أبسط الأنظمة التى نتداولها من وجهة النظر الكمية

تعين الحركة الميكانيكية الكمية بمعادلة القدر المناسب

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x})\right)u_E = E_0 u_E \qquad (٤-٥)$$

حيث

$$V(x)=0 \ , \ x<0 \ , \qquad V(x)=V \ , \ x>0 \qquad (٤-٦)$$

باستخدام تمثيل شرودنجر تبدو المعادلة (٤-٥) على النحو

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)u_E(x) = E_0 u_E(x) \qquad (٤-٧)$$

شرط الحدود العام ينص على أن u(x) دالة محدودة فى الفراغ الكلى. لابد أن نأخذ بعين الاعتبار أيضا عدم الاتصال[1] عند النقطة x = 0.

نظرا لأن التغير المفاجىء فى V(x) تغيرا محدودا والدالة u(0) محدودة، فمن المعادلة (٤-٧) تكون قيمة المشتقة الثانية للدالة u(x) عند x = 0 [u"(0)] محدودة هى الأخرى. هذا يعنى أن الدالة u(x) والمشتقة الأولى لها u'(x) متصلتان عند x = 0. بهذا نكون فى وضع يسمح لنا بالتمييز بين الحالتين تحت الدراسة.

---

(1) discontinuity

الحالة* (أ) $E_0 > V$ *(كميا)

باستخدام التعويض

$$k_0^2 = \frac{2mE_0}{\hbar^2} \quad , \qquad (٤-٨)$$

$$k_1^2 = \frac{2m(E_0 - V)}{\hbar^2} \qquad (٤-٩)$$

تؤول المعادلة (٤-٧) إلى

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2\right) u_L(x) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad ; \qquad (٤-١٠)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1^2\right) u_R(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad ; \qquad (٤-١١)$$

المعاملان R ,L يشيران إلى الحلول على شمال ويمين صفر الإحداثيات.

حلول المعادلتان السابقتان عبارة عن تراكب خطى(1) من الدوال الأسية:

$$u_L(x) = e^{\pm \iota k_0 x} \qquad (٤-١٢)$$

$$u_R(x) = e^{\pm \iota k_1 x} \qquad (٤-١٣)$$

هذه الدوال الأسية ماهى إلا موجات دى برولى المناظرة لكميتى الحركة p_1 , p_0 فى المعاملة الكلاسيكية. سنهتم هنا بالوضع الذى يقترب فيه الجسيم من جهة اليسار ويعانى انعكاسا أو نفاذا. ومن هنا فإننا نبحث عن الحلول التى لها الشكل

$$u_L(x) = e^{\iota k_0 x} + A e^{-\iota k_0 x} \qquad (٤-١٤)$$

(موجة ساقطة) + (موجة منعكسة)

$$u_R(x) = B e^{\iota k_1 x} \qquad (٤-١٥)$$

(موجة نافذة)

---

(1) linear combination

فـى المعادلـة (٤-١٤) قمنـا أثنـاء عمليـة التسـوية بضبـط معـامل الموجـة الساقطة ليصبح مساويا للوحـدة. كـل مـانود معرفتـه الآن هـو قيـم الطاقـات المتاحة E_0 لهذا النظام، وكذلك شدتى الموجة المنعكسة والنافذة بدلالة B,A، على الترتيب.

من شروط الاتصال عند $x = 0$ نحصل على

$$1 + A = B \qquad (\text{من اتصال } u) \qquad (٤-١٦)$$

$$k_0(1 - A) = k_1 B \qquad (\text{من اتصال } u') \qquad (٤-١٧)$$

يمكن حل هاتين المعادلتين لأى قيمة من قيم الطاقة E_0 ، ليكون

$$A = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \quad ; \quad B = \frac{2k_0}{k_0 + k_1} \qquad (٤-١٨)$$

على ذلك فإن النظام (بشرط أن يكون $E_0 > V$) ممكـن أن يحمـل أى مقـدار من الطاقة (أى لايوجد شرط يقيد قيم الطاقات المتاحة) كمـا هـو الحـال فـى الوضع الكلاسيكى. إلا أن الحركة المتاحة كميا تختلف اختلافا جوهريا عـن نظيرها الكلاسيكى، وبيان ذلك كما يلى:

الاحتمال النسبى لتواجد جسيم عند نقطة x، مثلا، حيث $x < 0$، يساوى

$$\begin{aligned} P_u(x) &= \left| e^{\iota k_0 x} + A e^{-\iota k_0 x} \right|^2 \\ &= 1 + |A|^2 + 2A\cos 2k_0 x \end{aligned} \qquad (٤-١٩)$$

الحد التذبذبى الأخير بهذه المعادلة ليـس لـه أهميـة فيزيائيـة كبيـرة، ويمكـن التخلص منه بأخذ متوسط الاحتمال النسبى فى منطقة كبيرة بالنسبة للمقـدار $2\pi/k_0$. الحدان الآخران يتولدان مباشرة من الموجتين الساقطة والمنعكسـة ويمكـن وصفهمـا علـى أسـاس أنهمـا يمثـلان الشـدتان النسـبيتان لهـاتين الموجتين. باتباع نفس المنوال يتسنى لنا القول أن $|B|^2$ تمثل الشـدة النسـبية للموجة النافذة.

السمة الوصفية الجديدة والمهمة فى المعاملة الكمية لهذا الوضع هى عدم تلاشى الموجة المنعكسة، حيث نجد

$$|A|^2 \neq 0 \qquad (٤-٢٠)$$

هناك وضعان لهما أهمية خاصة. نعلم من قبل أن المعاملة الميكانيكية الكمية لنظام تصبح ضرورية إذا كان

$\hbar \geq$ (كمية الحركة القياسية)× (الطول القياسى)

فى وضعنا الحالى الطول القياسى هو المسافة التى تتغير خلالها طاقة الوضع، أما كمية الحركة القياسية فهى كمية حركة الحزمة الساقطة. لهذا فإننا نصل إلى الحد الكلاسيكى عند قيم كبيرة لكميات الحركة، أى عندما يكون

$$E_0 >> V \qquad (٤-٢١)$$

وفى تلك الحالة، وباستخدام المعادلتين (٤-٨)، (٤-٩) نحصل على

$$k_0 \cong k_1$$

ومنه، باستخدام المعادلة (٤-١٨)، نجد

$$A \cong 0 \ ; \ B \cong 1 \qquad (٤-٢٢)$$

وهذا هو الحد الكلاسيكى الصحيح لحدوث النفاذ الكلى.

أما الحد الكمى للغاية(1) فينشأ عندما يكون

$$E_0 << |V| \qquad (٤-٢٣)$$

والحالة التى تتمتع بأهمية كبيرة يكون فيها V كبيرة فى المقدار ولكن سالبة الإشارة، أى حدوث انخفاض فجائى كبير فى طاقة الوضع. كلاسيكيا سوف يخترق الجسيم طاقة الوضع هذه مع زيادة كبيرة فى طاقة حركته . أما من

---

(1) the extreme quantum limit

الوجهة الكمية، فمن المعادلتين (٤-٨)، (٤-٩) نجد أن

$$k_0 << k_1 \qquad (٤-٢٤)$$

ومنه، باستخدام المعادلة (٤-١٨)، يكون

$$A \cong -1 \quad ; \quad B \cong 0 \qquad (٤-٢٥)$$

هذا يعني، كميا، حدوث انعكاس كلي على العكس تماما مع الوصف الكلاسيكي.

يلاحظ هذا التأثير الكمي في الفيزياء النووية عند سقوط نيوترون، مثلا، طاقته صغيرة على نواة ما. يشاهد عندئذ انعكاس للنيوترون عند اقترابه من سطح النواة، نتيجة لطاقة الوضع الكبيرة الجاذبة (سالبة الإشارة) للنواة.

الحالة* (ب) $E_0 < V$ *(كميا)

الحلول عند $x < 0$ تبقى كما هي دون تغيير. أما بالنسبة للحلول $u_R(x)$ فإننا نضع التعويض الجديد

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E_0) \qquad (٤-٢٦)$$

حينئذ يكون

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K^2\right) u_R(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \qquad (٤-٢٧)$$

مرة ثانية، بتمثيل الحالة بحزمة ساقطة من جهة اليسار شدتها مساوية للوحدة، نرى أن الحلول تأخذ الشكل

$$u_L(x) = e^{\iota k_0 x} + A e^{-\iota k_0 x} \qquad (٤-٢٨)$$

$$u_R(x) = C e^{-Kx} + D e^{+Kx} \qquad (٤-٢٩)$$

وحتى تكون u قابلة للتسوية فإن u_R يجب أن تؤول إلى الصفر عند مالانهاية، أى أن

$$D = 0$$

ومن شرط الاتصال عند النقطة $x = 0$ نجد الآتى:

$$1 + A = C \tag{٤-٣٠}$$

$$\iota k_0 (1 - A) = -KC \tag{٤-٣١}$$

بحل هاتان المعادلتان نحصل على (لأى قيمة من قيم E_0):

$$A = \frac{k_0 - \iota K}{k_0 + \iota K} \quad ; \quad C = \frac{2k_0}{k_0 + \iota K} \tag{٤-٣٢}$$

هذا يعنى عدم وجود أى قيود على القيم المتاحة للطاقة. زيادة على ذلك فإن

$$|A|^2 = 1 \tag{٤-٣٣}$$

أى أنه لأى قيمة للطاقة، فى هذا المدى، فإننا نحصل على انعكاس كلى كما كان الحال فى الوضع الكلاسيكى. إلا أن الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم فى المنطقة $x > 0$ ، الغير متاحة كلاسيكيا، يساوى

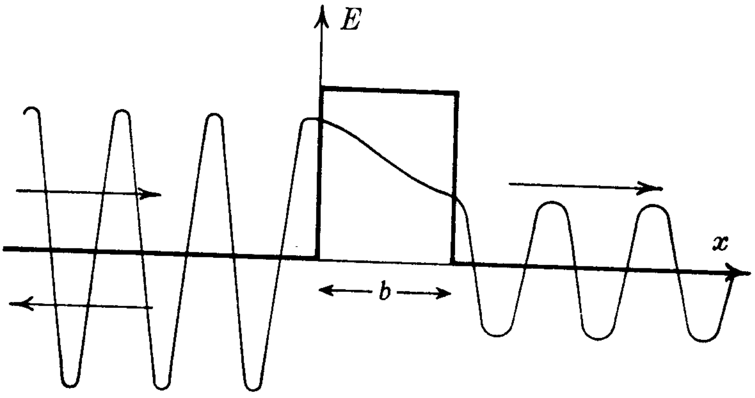
$$\begin{aligned} P_{u_R}(x) &= \left|Ce^{-Kx}\right|^2 \\ &= \frac{4k_0^2}{k_0^2 + K^2} e^{-2Kx} \end{aligned} \tag{٤-٣٤}$$

لهذا الاحتمال قيمة صغيرة بالقرب من حافة حاجز الجهد ويتناقص أُسيا[1] حتى يصل إلى قيمة مهملة عند المسافات الكبيرة بالنسبة إلى $1/K$.
هذه الحالة لها أهميتها الخاصة عند اعتبار سقوط موجة على حاجز جهد سمكه محدد b ، شكل ٤-٢ . فى هذا التأثير نحصل على احتمال معتبر

---

(1) exponentially

لتواجد الجسيم عند الحافة الأخرى لحاجز الجهد، حيث يستمر الجسيم فى الحركة بحرية إلى جهة اليمين بعد عبوره لحاجز الجهد.



شكل ٤-٢ منحنى الطاقة لحاجز جهد محدود، موضحين الموجتين الساقطة والنافذة.

من المعادلة (٤-٣٤) نرى أن الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم عند $x = 0, x = b$ يساوى

$$T = \exp[-2Kb]$$

$$= \exp\left[-2\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}(V - E_0)^{1/2} b\right] \qquad (٤-٣٥)$$

وهذا بمثابة تعبير تقريبى (صالح لقيم كبيرة للمسافة b) لاحتمال نفاذ جسيم طاقته E_0 من حاجز جهد ارتفاعه V وعرضه b. (فى حقيقة الأمر، الحلول داخل حاجز الجهد عبارة عن خليط من دوال أسية تزايدية وتناقصية، $e^{\pm Kx}$. ولحاجز جهد اتساعه صغير يكون تأثير الدالة الأسية التزايدية، e^{+Kx} ، له قيمة معتبرة (أنظر المسألة ٤-٤)).

تلك الإمكانية الكمية للنفاذ من حواجز الجهد التى تُوقِف الأجسام الكلاسيكية تعد الأساس لفهم النشاط الإشعاعى للنواة، الذى سيأتى ذكره فى الباب التاسع.

٤-٢ الندية[1]

من الملائم، قبل دراسة تأثير طاقات وضع أخرى، إدخال بعض الاعتبارات العامة عن دوال الحالة الواصفة للأنظمة التى طاقة وضعها تتبع المعادلة:

$$V(x) = V(-x) \qquad (٤-٣٦)$$

طاقات الوضع هذه متماثلة[2] حول نقطة الأصل.

لأى حل $u_E(x)$ يكون

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)u_E(x) = E\,u_E(x) \qquad (٤-٣٧)$$

وبتغيير x إلى x-، واستخدام المعادلة (٤-٣٦) يمكن ببساطة توضيح أن الدالة $u_E(-x)$ هى أيضا حل للمعادلة.

على فرض وجود حل واحد فقط مستقل خطيا[3] للمعادلة (٤-٣٧) عند أى قيمة مناسبة للطاقة E فإن الحلين سوف يختلفان عن بعضهما بمقدار ثابت فقط، أى أن

$$u_E(x) = \varepsilon\, u_E(-x) \qquad (٤-٣٨)$$

وعند تغيير x إلى x- نحصل على

$$u_E(-x) = \varepsilon\, u_E(x) \qquad (٤-٣٩)$$

---

(1) parity (2) symmetric (3)linearly independent

بالتعويض من المعادلة (٤-٣٩) فى المعادلة (٤-٣٨) نجد

$$\varepsilon^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon = \pm 1 \qquad (٤٠-٤)$$

الثابت ε يعرف بندية الحالة[1].

الحالات التى نديتها موجبة[2] (ε = +1) يكون فيها الدالة $u_E(x)$ متماثلة حول نقطة الأصل. أما الحالات التى نديتها سالبة[3] (ε = -1) فالدالة $u_E(x)$ لها تكون متماثلة ضديديا[4].

عند وجود أكثر من حل ليس له ندية محددة فإنه بالإمكان دائما تكوين حلول من الدوال $u_E(x)$ ، $u_E(-x)$ على النحو

$$u_e(X) = \frac{1}{2}[U_E(x) + u_E(-x)]$$
$$u_o(x) = \frac{1}{2}[u_E(x) - u_E(-x)] \qquad (٤١-٤)$$

التى لكل منها ندية محددة. لذلك بالإمكان دائما تكوين حلول إما متماثلة أو متماثلة ضديديا.

٤-٣ الحالات المقيدة[5]

درسنا حتى الآن طاقات الوضع التى يتحرك فيها الجسيمات بحرية. بمعنى أنه كلاسيكيا وكميا أيضا يمكن للجسيمات أن تصل إلى مالانهاية، ولو فى اتجاه واحد على الأقل. سنوجه اهتمامنا حاليا إلى الأنظمة المقيدة التى فيها لاتستطيع الجسيمات الوصول إلى مالانهاية. مرة أخرى، من أبسط طاقات الوضع التى ستنصب عليها دراستنا هى بئر الجهد المربع.

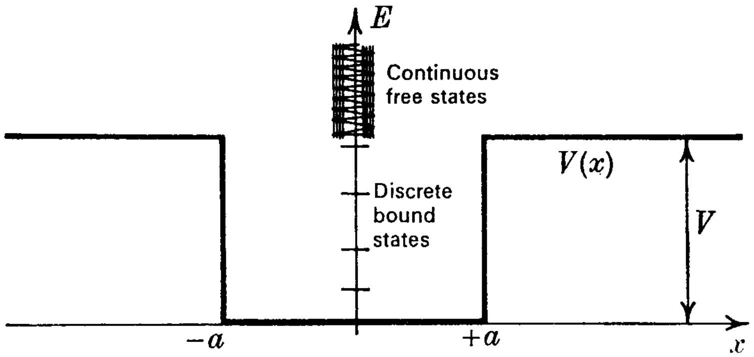
---

(1) parity of the state (2) positive parity (3) negative parity
(4) anti-symmetric (5) bound states

$$V(x) = 0 \quad ; \quad |x| \le a$$
$$V(x) = V \quad ; \quad |x| > a \qquad (٤-٤٢)$$

نعتبر الحال الذى فيه $E_0 < V$.

كلاسيكيا، يتحرك الجسيم بحرية فى المدى $|x| \le a$ نتيجة لوجود حاجز جهد على حدود هذه المنطقة. (فى البند ٣-٤ درسنا الوضع الذى فيه $V \to \infty$). من الملاحظ أن طاقة الوضع متماثلة حول صفر الإحداثيات ومحاولاتنا لمعرفة مالإذا كانت دوال القيم المناسبة متماثلة أيضا أو متماثلة ضديديا يساعد كثيرا فى إيجاد الحلول المطلوبة.



شكل ٤-٣ منحنى الطاقة لبئر جهد مربع.

بدون تكرار لماسبق، نرى أن معادلة القدر المناسب للطاقة لهذا الوضع تتمثل فى المعادلة (٤-٧) وتؤول عندئذ إلى المعادلة (٤-١٠) فى المدى $|x| \le a$.أما فى المدى $|x| > a$ فإنها تؤول إلى المعادلة (٤-٢٧).

باعتبار الحلول فى المنطقة الداخلية، $|x| \le a$، فإننا نجد

$$u_i(x) = \cos k_0 x \quad , \quad \sin k_0 x \qquad (٤-٤٣)$$

فى هذه الحلول استبدلنا متعمدين الدوال الأسية المبسطة بدوال زوجية وفردية.

أما الحل فى المنطقة الخارجية من جهة اليمين، x > a، فيكتب كما يلى (بالمثل كما كان بالمعادلة (٤-٢٩)):

$$u_R(x) = Ce^{-Kx} \qquad (٤-٤٤)$$

الحل الآخر الذى يناظر الدالة الأسية التزايدية غير مسموح به لكى تؤول u(x) إلى الصفر عند مالانهاية، وبالتالى يصبح فى الإمكان تسوية الدالة الموجية. من متطلبات الندية، نرى أن الحل فى المنطقة الخارجية من جهة اليسار يكتب كما يلى:

$$u_L(x) = \pm Ce^{-K|x|} \qquad (٤-٤٥)$$

لهذا يوجد نوعان من الحلول وهما الحلول المتماثلة (ندية موجبة)

$$u_i(x) = \cos k_0 x$$

$$u_R(x) = Ce^{-Kx} \;\; ; \;\; u_L(x) = Ce^{-K|x|} \qquad (٤-٤٦)$$

والحلول المتماثلة ضديديا (ندية سالبة)

$$u_i(x) = \sin k_0 x$$

$$u_R(x) = C'e^{-Kx} \;\; ; \;\; u_L(x) = -C'e^{-K|x|} \qquad (٤-٤٧)$$

فى هذين الحلين ضبطنا المعامل فى المنطقة الداخلية ليصبح مساويا للوحدة. عملية التسوية الصحيحة التى تتم طبقا للمعادلة (٣-٣٢) يمكن دائما الوصول إليها بضرب الدالة المعبرة عن الحل الكلى فى ثابت مناسب.

لكل حل من هذه الحلول يجب أن يتحقق شرطان للاتصال عند |x|=a. إلا أننا نلاحظ وجود ثابت حر واحد فقط، بسبب تلاشى معامل الدالة الأسية التزايدية. وهذا يخالف الوضع فى الحالة الغير مقيدة. معنى ذلك أنه يجب النظر إلى الطاقة E_0 ، هى الأخرى، كبارامتر ضبط حتى تتحقق شروط الاتصال. لقيم متقطعة فقط من الطاقة E_n، يمكن لشروط الاتصال أن تتحقق.

للحلول الزوجية، نجد أن

$$\cos k_0 a = C e^{-Ka}$$
$$k_0 \sin k_0 a = K C e^{-Ka} \qquad (٤-٤٨)$$

التى تتحقق فقط بشرط أن يكون

$$k_0 \tan k_0 a = K \qquad (٤-٤٩)$$

بالتعويض من المعادلتين (٤-٨)، (٤-٢٦) عن k_0 , K فإن المعادلة (٤-٢٩) تعين قيم E_n المناظرة للحلول التى نديتها موجبة. وبالمثل، للحلول التى نديتها سالبة نحصل على

$$k_0 \cos k_0 a = -K \qquad (٤-٥٠)$$

يمكن حل هذه المعادلات بيانيا للحصول على قيم E_n.

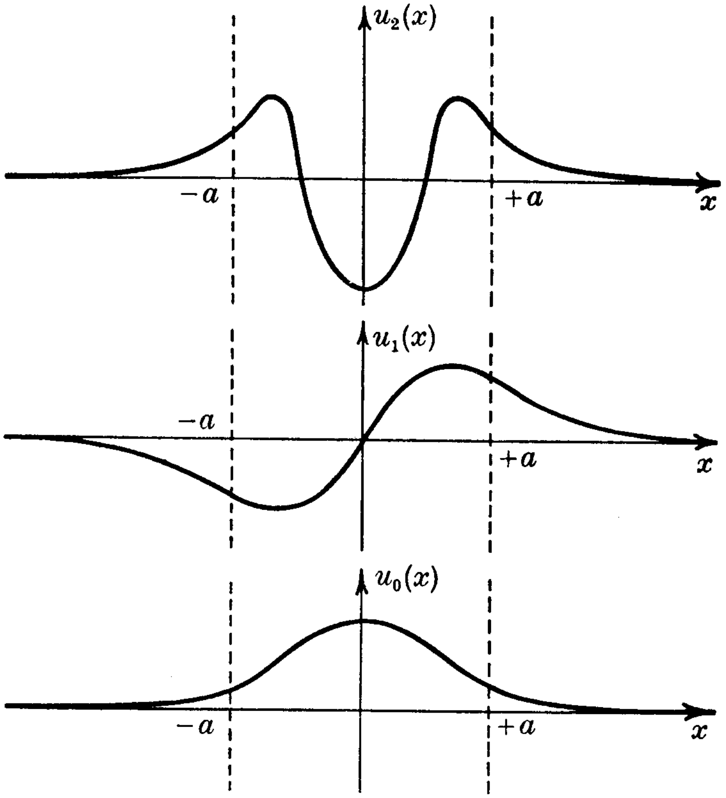
ليس من المهم كثيرا هنا الحصول على حلول خاصة ولكن الأكثر أهمية الحصول على الحل العام فى مدى الطاقات التى تؤدى كلاسيكيا إلى الحالات المقيدة، ومن الوجهة الكمية تؤدى إلى الطيف المتقطع للطاقة.

نستطيع وضع بعض الملاحظات العامة حول شكل دوال القيم المناسبة. طبقا للمعادلة (٤-٢٧) نجد أنه فى المنطقة الخارجية يكون

$$u''/u > 0 \qquad (٤-٥١)$$

هذا يعنى أنه للقيم الموجبة للدالة u فإن المنحنى يتميز بنهاية صغرى، وللقيم السالبة يتميز المنحنى بنهاية عظمى. يعبر إجمالا عن هاتين الخاصيتين كالآتى: دالة الحالة فى المنطقة الخارجية تنحنى مبتعدة عن المحور (تتحدب). بالمثل فإن دالة الحالة تنحنى مقتربة من المحور (تتقعر) فى المنطقة الداخلية. زيادة على ذلك فإن النسبة u''/u تحدد الانحناء، وطبقا لمعادلة القدر المناسب فإن قيمة هذا الانحناء تزداد مع زيادة E. القيم

المناسبة E_n هـى تلـك القيـم التـى تتناسـق عندهـا دالـة الحالـة فـى الأجـزاء المحدبة الخارجية مع الأجزاء المقعرة الداخلية، من حيث الميل والمقدار.



شكل ٤-٤ الشكل النموذجى للدوال المناسبة للطاقة للثلاث مستويات المقيدة الأولى، موضحين الندية وعدد التقاطعات.

الحالة الأرضية $u_o(x)$ هـى تلـك الحالـة (الدالـة) الزوجيـة التـى فيهـا يكـون الانحناء فى نهايته الصغرى مع عدم وجود أى تقاطعات مع المحور. الحالة التى تليها، $u_1(x)$، فردية وتقطع المحور مرة واحدة فقط. أمـا $u_2(x)$ فهـى

حالة زوجية وتقطع المحور مرتين، انظر شكل ٤-٤. بوجه عام الحالة التى ترتيبها n نديتها تساوى $(-1)^n$ وتقطع المحور عدد n من المرات.

لتلخيص ماسبق نقول:

١- فى مدى الطاقات المناظرة كلاسيكيا لحالات حرة فإن النظام الكمى يتمتع بنفس المدى المتصل من الطاقات.

٢- توصف الجسيمات، التى تتحرك تحت تأثير طاقات وضع متماثلة، بدوال مناسبة للطاقة إما متماثلة (ندية زوجية) أو متماثلة ضديديا (ندية سالبة) حول نقطة الأصل.

٣- فى مدى الطاقات المناظرة كلاسيكيا لحالات مقيدة يتمتع النظام الكمى بمستويات طاقة متقطعة.

٤-مستوى الطاقة الذى ترتيبه n تكون ندية الدالة الواصفة له مساوية $(-1)^n$، وتقطع الدالة المحور عدد n من المرات.

مسائل ٤

٤-١ ارسم منحنيات تقريبية للدوال المناسبة للطاقة فى حالة بئر جهد مربع لانهائى، وبين أنها تحقق الشروط ٤،٣،٢ المذكورة بالملخص عند نهاية هذا الباب.

٤-٢ بين أن الحلول المناسبة للطاقة فى حالة بئر جهد مربع متماثل يمكن أن تتواجد عند أى قيمة للطاقة بشرط أن يكون $E > V$.

٤-٣ جسيم كتلته m يتحرك بحرية على امتداد خط مستقيم مقتربا من حاجز الجهد

$$V(x) = 0 \ , \ \ x < 0 \ \text{ or } \ x > a$$
$$V(x) = V \ , \ \ 0 \le x \le a \ ,$$

وقادما من $x = -\infty$. فإذا كانت طاقته E أقل من V، وكان

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad ,$$

$$K^2 = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

أوجد نسبة شدة الحزمتين النافذة والمنعكسة عندما يكون

$$Ka << 1$$

وإذا كانت الحزمة تقترب من منتصف حاجز جهد رفيع جدا بحيث يكون

$$k \cong K \quad , \quad ka << 1$$

فبين أن الحزمة غالبا مايحدث لها نفاذ تام.

من الناحية الأخرى، إذا كانت الحزمة تقترب من قمة حاجز جهد مرتفع بحيث يكون

$$k >> K \quad , \quad ka >> 1$$

فبين أن الحزمة غالبا مايحدث لها انعكاس تام.

(عبر عن دالة الحالة فى المنطقة $x > a$ فى الصورة $u(x) = De^{ik(x-a)}$ ، واستخدم المفكوك $e^{Ka} = 1 + ka$، إلخ)

٤-٤ جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير طاقة الوضع

$$V(x) = \infty \quad , \quad x \le 0$$

$$V(x) = 0 \quad , \quad 0 < x < a$$

$$V(x) = V(> 0) \quad , \quad a \le x \le b$$

$$V(x) = 0 \quad , \quad x > b$$

إذا آلت b إلى مالانهاية فوضح أن القيم المتاحة للطاقة،عندما يكون $E < V$، تحقق العلاقة

$$k \cot ka + K = 0$$

حيث K , k معرفان فى المسألة ٤-٣.

إذا كانت الطاقة لها مثل هذه القيمة وكانت b محدودة فوضح أن الشدة النسبية عند x = a , x = b تساوى

$$T = e^{-2K(b-a)}$$

فى المنطقة x > b بين أن شدتى الحزمة المتجهة جهتى اليمين واليسار متساوية. بذلك يكون هذا النظام مُمَثِّلا لمخزن للجسيمات المأسورة بواسطة طاقة الوضع بالقرب من نقطة الأصل، وعند طاقة مساوية للقيمة المناسبة الممكنة عندما تؤول b إلى مالانهاية. للقيم المحدودة b تتسرب الجسيمات باستمرار من خلال حاجز الجهد ولكن يمكن استعواضها أيضا بمصدر للجسيمات عند مالانهاية. هذا النظام قريب الشبه جدا بنواة مشعة (انظر البند ٩-٣).

(فى المنطقة o < x < a استخدم دالة الحالة المساوية sin kx، لأن u(o) =o لهذا الوضع. وفى المناطق الأخرى استخدم الدوال

$$u(x) = A e^{-K(x-a)} + B e^{K(x-a)} \quad a \le x \le b$$

$$u(x) = C e^{-\iota k(x-b)} + D e^{+\iota k(x-b)} \quad b < x$$

(

الباب الخامس

المهتز التوافقى

٥-١ النظرية الكلاسيكية

طبقا للنظرية الكلاسيكية، ننظر إلى المهتز التوافقى علـى أنـه جسـيم كتلته m يتحرك تحت تأثير القوة

$$F = -m\omega^2 x \qquad (٥-١)$$

ويخضع لمعادلة الحركة

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (٥-٢)$$

التى حلها

$$x = a\cos\omega t \qquad (٥-٣)$$

هذا الحل يصف حركة اهتزازية ترددها الزاوى ω وسعتها a.

ترتبط دائما طاقة الوضع مع القوة بالعلاقة

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ومنه، باستخدام المعادلة (٥-١) وإجراء التكامل، يكون

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (٥-٤)$$

تعطى طاقة الاهتزازة (٥-٣) مـن المعادلـة (٥-٤) بوضـع $x = a$. أى أن طاقة الاهتزازة هى طاقة الجسيم المهتز عندما يكون عند أقصى مسافة،

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \qquad (٥-٥)$$

٥-٢ النظرية الكمية - القيم المناسبة

نتداول الآن النظرية الكمية لهذا النظام المهتز. نظرا لأن الحركة الكلاسيكية مقيدة لجميع قيم الطاقات فإن الأطياف الكمية الكلية للطاقات تظهر بصورة متقطعة (راجع الباب السابق). المعادلة (٣-١٦) هى معادلة القدر المناسب لهذا النظام مع استبدال $\hat{H}$ بالمؤثر

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \qquad (٥-٦)$$

وعند استخدام تمثيل شرودنجر تأخذ المعادلة (٣-١٦) الصورة

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right] u_n(x) = E_n u_n(x) \qquad (٥-٧)$$

بضرب طرفى المعادلة فى $2/\hbar\omega$ نجد أن

$$\left[-\frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right] u_n(x) = \frac{2E_n}{\hbar\omega} u_n(x) \qquad (٥-٨)$$

وبوضع

$$y = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x \ , \qquad (٥-٩)$$

$$\varepsilon_n = E_n / \hbar\omega \qquad (٥-١٠)$$

تؤول المعادلة (٥-٨) إلى الصورة المبسطة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) u_n(y) = -2\varepsilon_n u_n(y) \qquad (٥-١١)$$

نستطيع حل هذه المعادلة بطرق قياسية معروفة. سوف نستخدم هذه الطرق فيما بعد لإيجاد الحلول الخاصة بكمية الحركة الزاوية وحلول ذرة الهيدروجين. بدلا من الدخول فى تفاصيل هذه الحلول الآن، فإننا

نستخدم طريقة التحليل إلى عوامل[1] لحل المعادلـة. ذلك لأن هـذه الطريقـة سوف تمدنـا بنـوع جديد مـن المؤثـرات التـى تلعب دورا هاما للغايـة فـى النظرية الكمية.

نظرا لأن (راجع الباب الثانى)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_n(y)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y^2-1\right)u_n(y)$$

فإن المعادلة (٥-١١) نستطيع إعادة كتابتها كما يلى:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_n(y)=\left[-2\varepsilon_n-1\right]u_n(y) \qquad \text{(٥-١١أ)}$$

يمكن أيضا كتابتها فى الصورة

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)u_n(y)=\left[-2\varepsilon_n+1\right]u_n(y) \qquad \text{(٥-١١ب)}$$

بضرب المعادلة (٥-١١أ) فى $\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)$ نجد

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_n(y)= \left[-2\varepsilon_n-1\right]\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_n(y) \qquad \text{(٥-١٢)}$$

وعليه فإما أن يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_n(y)=0 \qquad \text{(٥-١٣)}$$

أو يكون

(1) factorization method

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) u_n(y) = u_{n+1}(y) \qquad (٥-١٤)$$

وعليه تؤول المعادلة (٥-١٢) إلى

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_{n+1}(y) = \left[-2(\varepsilon_n + 1) + 1\right] u_{n+1}(y)$$

(٥-١٥)

هذه المعادلة ماهى إلا المعادلة (٥-١١ب) للدالة u_{n+1} على شرط أن يكون

$$\varepsilon_n + 1 = \varepsilon_{n+1} \qquad (٥-١٦)$$

الحل الوحيد للمعادلة (٥-١٣) هو

$$u(y) = e^{+(1/2)y^2}$$

لقيم كبيرة للمتغير y يتباعد[1] هذا الحل، وبالتالى ليس هو الحل المطلوب.

على ذلك فلأى حالة u_n ينتمى إليها القيمة المناسبة ε_n يصبح من الممكن دائما توليد حالة أخرى u_{n+1} ينتمى إليها القيمة المناسبة ε_n+1.

بضرب المعادلة (٥-١١ب) فى $\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)$ واتباع نفس المنوال السابق، نحصل على

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_n(y) = \left[-2\varepsilon_n + 1\right]\left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) u_n(y) \qquad (٥-١٧)$$

---

(1) diverge

الآن إما أن يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)u_n(y)=0 \qquad (٥-١٨)$$

أو يكون

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)u_n(y)=u_{n-1}(y) \qquad (٥-١٩)$$

وللحالة الأخيرة، تؤول المعادلة (٥-١٧) إلى

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-y\right)u_{n-1}(y)=\left[-2(\varepsilon_n-1)-1\right]u_{n-1}(y)$$

(٥-٢٠)

وهى ذاتها المعادلة (٥-١١أ) بشرط تحقق العلاقة

$$\varepsilon_n-1=\varepsilon_{n-1} \qquad (٥-٢١)$$

وهذا يعنى أنه لأى حالة u_n ينتمى إليها القيمة المناسبة ε_n يمكن توليد حالة أخرى $u_{n-1}(y)$ بطاقة أقل. هذه الحالة الجديدة (الحل الجديد) تعين من المعادلة (٥-١٩) والقيمة المناسبة للطاقة المنتمية إليها تساوى ε_n-1، وذلك إن لم يكن الحالة الابتدائية u_n هى الحالة الأرضية u_0. فى هذا الوضع دالة الحالة الأرضية لابد أن تحقق المعادلة (٥-١٨)، أى أن

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+y\right)u_0(y)=0 \qquad (٥-٢٢)$$

هذه المعادلة تمدنا بدالة القيمة المناسبة للحالة الأرضية، لتصبح مساوية

$$u_0(y)=e^{-(1/2)y^2} \qquad (٥-٢٣)$$

فضلا عن ذلك، من المعادلتين (٥-٢٢)، (٥-١١ب)، طاقة الحالة الأرضية تحقق المعادلة

$$2\varepsilon_0-1=0 \qquad (٥-٢٤)$$

باستخدام المعادلتين (٥-١٦)، (٥-٢٤) نجد أن القيم المناسبة للطاقة تساوى

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\ ,\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2} + 1\ ,\dots,\ \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}\ ,\dots$$

من المعادلة (٥-١٠) نستخلص العلاقة

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \tag{٥-٢٥}$$

أى أن قيم الطاقات، بالاتفاق مع المفهوم السابق، تُكَوِّن فئة متقطعة.

التعبير الذى يعين قيم مستويات الطاقة يعد من أكثر الأشياء أهمية فى ميكانيكا الكم. هذا التعبير، المعادلة (٥-٢٥)، يتفق مع تفسير بلانك لكيفية تفاعل الإشعاع مع المادة، بشرط اعتبار المادة أنها عبارة عن تجمع للعديد من المهتزات (المتذبذبات) التوافقية، وكل مهتز يبعث أو يمتص إشعاع تردده مساوى لتردد المهتز التوافقى. من ذلك فإن تبادل الطاقة يتحدد من القيم المناسبة المتاحة للمهتز التوافقى، أى من المعادلة (٥-٢٥). إلا أن هذه المعادلة تتغير بوحدات $\hbar\omega$ وهذا هو بالضبط الفرض الكمى لبلانك.

٥-٣ دوال القيم المناسبة - مؤثرات الإفناء والتوليد[1]

يمكن توليد دوال القيم المناسبة المتتابعة من الدالة $u_0(y)$ وذلك بتكرار تطبيق المعادلة (٥-١٤). على سبيل المثال

(1) annihilation and creation operators

$$u_1(y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) u_0(y)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) e^{-(1/2)y^2} \qquad (٥-٢٦)$$

$$= -2y\,e^{-(1/2)y^2}$$

دالة الحالة الأرضية، $u_0(y)$،دالة زوجية فى y ولاتقطع المحور. أما دالة الحالة المثارة الأولى، $u_1(y)$، فهى دالة فردية وتقطع المحور مرة واحدة فقط. من السهل، بتكرار تطبيق المعادلة (٥-١٤)، إثبات أن دوال القيم المناسبة المتتابعة تتميز بنفس السمات العامة المستنتجة بالباب السابق. تُعْرف الدوال المستنتجة بهذه الطريقة باسم متعددات حدود هرميت[1].

فى الحقيقة، دالة القيمة المناسبة للحالة الأرضية عبارة عن دالة ذات تحدب جاوسى مشابهه لما تم دراسته فى مبدأ عدم التحديد بالبند ٣-٦.

من المعادلتين (٥-٢٣)،(٥-٩) نلاحظ أن عرض التحدب الجاوسى يساوى

$$\Delta_x = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \qquad (٥-٢٧)$$

ومن المعادلة (٥-٥) نجد أن Δ_x هى بالضبط قيمة سعة المهتز الكلاسيكى الذى له نفس طاقة الحالة الأرضية.

المؤثران

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - y\right) \;,\; \left(\frac{\partial}{\partial y} + y\right) \qquad (٥-٢٨)$$

يتمتعان بأهمية خاصة، نظرا لاختلاف نوعيهما عما تم دراسته من قبل.

(1) Hermite polynomials

نعلم مسبقا أن المؤثرات تعبر عن عمليات من الممكن ملاحظتها، أى تعبر عن عمليات القياس. المثال التوضيحى النموذجى على ذلك هو المؤثر الذى نعين به طاقة المهتز التوافقى

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(y^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \qquad (٥-٢٩)$$

تبعا للمعادلتين (٥-١٤)، (٥-١٩)، هذا المؤثر يمثل عملية إزاحة فيزيائية للمهتز (لأعلى أو لأسفل) من مستوى طاقة ما إلى المستوى الذى يليه. ونظرا لأن الطاقة تتولد أو تختفى أثناء تلك العملية بوحدات $\hbar\omega$ فإن المؤثرين، المعادلة (٥-٢٨)، يطلق عليهما اسم مؤثرى التوليد والإفناء. هذان المؤثران يلعبان دورا هاما للغاية عند دراسة النظرية الكمية لتفاعل الإشعاع مع المادة (المادة متمثلة فى الإلكترونات).

٥-٤ ملخص

القيم المناسبة لطاقة المهتز التوافقى الكمى الذى تردده الزاوى ω تساوى

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

مسائل ٥

٥-١ استخدم مؤثر التوليد لاستنتاج الحالة المناسبة $u_2(x)$.

٥-٢ جسيم فى الحالة $u_0(x)$. استخدم المعادلة (٣-٣٩) للتحقق من عدم إمكانية الحصول على النتيجة E_1 أو E_2 عند قياس الطاقة.

٥-٣ عين القيمة المتوسطة لكمية الحركة

$$|p| = \left| -\iota\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right|$$

لمهتز توافقى فى الحالة الأرضية $u_0(x)$.(بالنسبة لتكامل التسوية انظر المسألة ٣-٣)

٥-٤ بمعلومية مؤثرى الإفناء والتوليد المُسويان

$$\hat{a} = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}\left(y + \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{a}^+ = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

وضح أن

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = \hbar\omega \ ,$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega \ ,$$

$$\hat{a}^+\hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega .$$

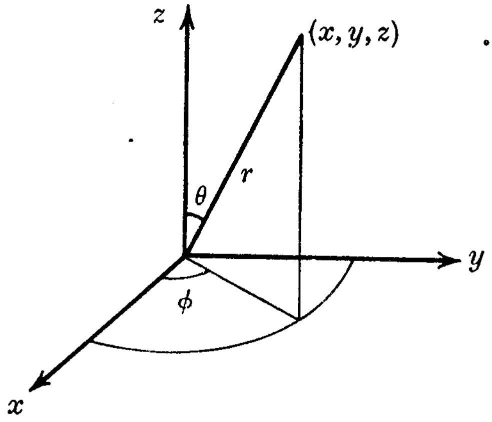
الجزء الثانى

الفيزياء الذرية

الباب السادس
كمية الحركة الزاوية

٦-١ مؤثرات كمية الحركة الزاوية

من الضرورى قبل دراسة ذرة الهيدروجين التعرف على النظرية الكمية لكمية الحركة الزاوية. لعمل ذلك يستحسن استخدام الإحداثيات القطبية الكروية (r,ϑ,φ) التى ترتبط بالإحداثيات الكارتيزية (x,y,z) بالعلاقات، انظر شكل ٦-١.



شكل ٦-١ النقطة (x,y,z) تعين فى الإحداثيات القطبية الكروية بالإحداثيات (r, ϑ,φ).

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\
y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\
z &= r\cos\vartheta
\end{aligned}
\qquad (٦-١)
$$

بتطبيق مبدأ التناظر، ف(١)، يمكن كتابة المؤثرات، المعبرة عن مركبات كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل، بدلالة الموضع وكمية الحركة

الخطيـة، التـى بدورهـا تكتـب (استـخدم المعادلـة (٣-١٤)) طبقـا لتمثيـل شرودنجر كما يلى:

$$\hat{\ell}_x = \hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y \rightarrow -\iota\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{\ell}_y = \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z \rightarrow -\iota\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (٦-٢)$$

$$\hat{\ell}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x \rightarrow -\iota\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ولكن

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

التى نستطيع تقييمها باستخدام المعادلة (٦-١). فى الإمكـان أيضـا استنتاج العلاقات المشابهة للتفاضلات الأخرى $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. بهـذه الطريقـة يتسنى لنا التعبير عن مؤثرات كمية الحركة الزاوية بدلالة المتغيرات الزاويـة، أى أن

$$\hat{\ell}_x \rightarrow \iota\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) ,$$

$$\hat{\ell}_y \rightarrow \iota\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) , \qquad (٦-٣)$$

$$\hat{\ell}_z \rightarrow -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

٦-٢ المركبة- Z

نحصل على الشكل الخاص بالمؤثر $\hat{\ell}_z$ من التطبيق المباشـر للصـورة العامة لمبدأ التتام المذكور عند نهاية البنـد ٣-٣. نظـرا لأن $\hat{\ell}_z$ هـى كميـة

الحركة الزاوية المناظرة لعملية الملاحظة $\hat{\varphi}$ فإن علاقة المبادلة بين هذين المؤثرين هى

$$\left[\hat{\varphi}, \hat{\ell}_z\right] = \iota\hbar$$

وبتمثيل المؤثر $\hat{\varphi}$ بالمتغير الجبرى φ فإن مؤثر كمية الحركة الزاوية المناظر يصبح مساويا

$$\hat{\ell}_z\left(=\hat{\ell}_\varphi\right) \rightarrow -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (٦-٤)$$

وذلك لكى تتحقق علاقة المبادلة. لاحظ أن المعادلة السابقة تشبه تماما المعادلة (٣-١٤).

نعين القيم الممكنة (المتاحة) لكمية الحركة الزاوية من معادلة القدر المناسب الخاصة بالمؤثر $\hat{\ell}_z$، وهى

$$-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}u_m(\varphi) = \hbar m\, u_m(\varphi) \qquad (٦-٥)$$

حيث $\hbar m$ هى القيم المناسبة.

نظرا لأننا نعود مرة أخرى إلى نفس الوضع الفيزيائى عند الدوران بزاوية مقدارها $2n\pi$ (لقيم n الصحيحة) فيجب علينا إدخال شرط للحدود على الدالة $u_m(\varphi)$، وهو أنها دالة دورية. بذلك يصبح حل المعادلة (٦-٥) كالآتى:

$$u_m = e^{\iota m\varphi} \qquad (٦-٦)$$

ومن شرط الحدود، تأخذ m القيم

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

من الملاحظ أن هذا يعبر بالضبط عن قاعدة بوهر (١-٢٠) التى أدخلها بطريق المحاولة على النظرية الكلاسيكية، للحصول على الأطياف

المتقطعة لذرة الهيدروجين. أما الآن فقد ظهرت هذه القاعدة نتيجة لتطبيق النظرية الكمية.

٦-٣ كمية الحركة الزاوية الكلية - القيم المناسبة

يمكن بسهولة التأكد من عدم تبادل المؤثر $\hat{\ell}_z$ مع المؤثرين $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y$، أى التأكد من صحة العلاقات

$$\left[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_z\right] \neq 0 \quad , \quad \left[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z\right] \neq 0 \qquad (٦-٧)$$

هذا يعنى، على وجه العموم، أن دالة الحالة المناسبة لأى من هذه المركبات ليست دالة حالة مناسبة أيضا للمركبات الأخرى. وبالتالى لانستطيع التعرف بدقة تامة على أكثر من مركبة واحدة فقط من مركبات كمية الحركة الزاوية، وهذا بالطبع نتيجة للاضطرابات المتبادلة الناشئة عن عمليات الملاحظة. هناك حالة خاصة عندها تكون كمية الحركة الزاوية مساوية للصفر. لتلك الحالة المركبات الثلاثة لكمية الحركة الزاوية تساوى صفر، كلا على حده، أى يمكن معرفة المركبات الثلاثة بدقة تامة، وسوف نوضح ذلك فى المناقشة التى تلى المعادلة (٦-٤٦).

بتطبيق مبدأ التناظر نستطيع تكوين المؤثر الخاص بمربع كمية الحركة الزاوية

$$\hat{\ell}^2 = \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2$$
$$\to -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (٦-٨)$$

من المعادلتين (٦-٤)، (٦-٨) نستطيع التحقق من صحة العلاقة

$$\left[\hat{\ell}^2, \hat{\ell}_z\right] = 0$$

التى تعنى إمكانية معرفة قيمة كمية الحركة الزاوية بالإضافة إلى أحد مركباتها بالضبط، فى آن واحد. ومن هنا يجب أن يتواجد دالة حالة مناسبة، $Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi)$، لكلا المؤثرين $\hat{\ell}^2, \hat{\ell}_z$ وتحقق معادلتى القدر المناسب

$$\hat{\ell}_z Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi) = \hbar m\, Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi) \qquad (٦-٩)$$

$$\hat{\ell}^2 Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2 \beta\, Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi) \qquad (٦-١٠)$$

نظرا لاعتماد المؤثر $\hat{\ell}_z$ على φ فقط فإن دوال الحالات المناسبة تكتب فى الصورة

$$Y_{\beta m}(\vartheta,\varphi) = P_{\beta m}(\vartheta)\, e^{\iota m\varphi} \qquad (٦-١١)$$

التى بالتأكيد تحقق المعادلة (٦-٩).

بالتعويض من المعادلة (٦-١١) فى المعادلة (٦-١٠) واستخدام المعادلة (٦-٨) نحصل على المعادلة (بعد اختصار الأجزاء المعتمدة على φ)

$$\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_{\beta m}(\vartheta) = -\beta\, P_{\beta m}(\vartheta) \qquad (٦-١٢)$$

التى يُنظر إليها على أنها معادلة القدر المناسب، بالنسبة إلى β، ومنها نعين القيم الممكنة المنتمية للمؤثر $\hat{\ell}^2$ عندما يكون القيم الممكنة للمؤثر $\hat{\ell}_z$ مساوية $\hbar m$.

يجب علينا حل هذه المعادلة مرتبطة بشرط الحدود الفيزيائى الضرورى، وهو أن $P_{\beta m}(\vartheta)$ تظل محدودة فى المدى الفيزيائى $0 \le \vartheta \le \pi$.

بإدخال المتغير

$$\omega = \cos\vartheta \qquad (٦-١٣)$$

نجد أن

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta} = -\frac{d}{d\omega} \qquad (٦-١٤)$$

والمعادلة (٦-١٢) تصبح

$$\frac{d}{d\omega}\left(1-\omega^2\right)\frac{dP}{d\omega}+\left(\beta-\frac{m^2}{1-\omega^2}\right)P=0 \qquad (١٥-٦)$$

حيث $P(\omega)$ لابد أن تكون محدودة فى المدى

$$-١ \le \omega \le ١ \qquad (١٦-٦)$$

(لاحظ أننا أهملنا كتابة المعامل $\beta\, m$ المصاحب للدالة P)

من السهولة بمكان إعادة صياغة المعادلة (٦-١٥) لتأخذ الشكل

$$\frac{d^2P}{d\omega^2}-\frac{2\omega}{1-\omega^2}\frac{dP}{d\omega}+\left(\frac{\beta}{1-\omega^2}-\frac{m^2}{\left(1-\omega^2\right)^2}\right)P=0 \qquad (١٧-٦)$$

من الملاحظ أنه عندما يكون $\omega = \pm 1$ تصبح معاملات المعادلة السابقة غير محدودة وتكون الدالة P غير محدودة هى الأخرى مما يناقض متطلبات شرط الحدود.

نعتبر أولا الحل بالقرب من $\omega = 1$. يمكن كتابة

$$\frac{2\omega}{١-\omega^2}=\frac{١}{١-\omega}-\frac{١}{١+\omega}\cong\frac{١}{١-\omega}\,, \qquad (١٨-٦)$$

وكذلك

$$\frac{1}{\left(1-\omega^2\right)^2}=\frac{1}{(1-\omega)^2(1+\omega)^2}\cong\frac{1}{4(1-\omega)^2} \qquad (١٩-٦)$$

حيث علامتى التساوى التقريبية، $\cong$، بالمعادلتين تتحقق عندما يكون $\omega \cong 1$. عندما $\omega \cong 1$ يمكن إهمال الحد المحتوى على β بالمقارنة بالحد المحتوى على m^2، لتؤول المعادلة (٦-١٧) إلى الصورة التقريبية

$$\frac{d^2P}{d\omega^2}-\frac{1}{1-\omega}\frac{dP}{d\omega}-\frac{m^2}{4(1-\omega)^2}P=0 \qquad (٢٠-٦)$$

يبدو حل هذه المعادلة على النحو

$$P = (1-\omega)^{\alpha}\left[a_0 + a_1(1-\omega) + a_2(1-\omega)^2 + \ldots\right] \qquad (٦-٢١)$$

مع افتراض أن (دون التأثير على عمومية الحل)

$$a_0 \neq 0 \qquad (٦-٢٢)$$

بالتعويض من المعادلة (٦-٢١) فى المعادلة (٦-٢٠) نجد أن مجموع معاملات القوى المختلفة للكمية (ω -1) يجب أن تتلاشى، وعلى وجه الخصوص مجموع معاملات $(1-\omega)^{\alpha-2}$ التى تعطى

$$a_0\left[\alpha(\alpha-1) + \alpha - \frac{m^2}{4}\right] = 0 \qquad (٦-٢٣)$$

نظرا لأن $a_0 \neq 0$ فإننا نحصل على

$$\alpha = \pm\frac{|m|}{2} \qquad (٦-٢٤)$$

ومنه نحصل على الحلين المستقلين

$$P_0^{(1)} = (1-\omega)^{|m|/2}\left[a_0 + \ldots\right] \qquad (٦-٢٥)$$

$$P_\infty^{(1)} = (1-\omega)^{-|m|/2}\left[a_0' + \ldots\right] \qquad (٦-٢٦)$$

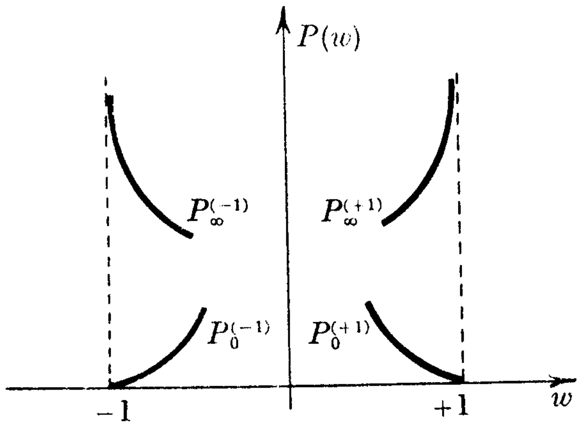
هاتان المعادلتان تؤولان إلى الصفر ومالانهاية، على الترتيب، عندما $\omega = 1$، وعليه عندما $\omega = 1$ يتحقق شرط الحدود للدالة $P_0^{(1)}$ فقط.

باتباع نفس المنوال في الجوار القريب من $\omega = -1$ نستطيع البرهنة على وجود الحلان المستقلان

$$P_0^{(-1)} = (1+\omega)^{|m|/2}\left[b_0 + b_1(1+\omega) + \ldots\right] \qquad (٦-٢٧)$$

$$P_\infty^{(-1)} = (1+\omega)^{-|m|/2}\left[b_0' + b_1'(1+\omega) + \ldots\right] \qquad (٦-٢٨)$$

حيث يتحقق شرط الحدود عند $\omega = -1$ للدالة $P_0^{(-1)}$ فقط. شكل ٦-٢ يوضح سلوك هذه الدوال.



شكل ٦-٢ رسم تخطيطى لحلول المعادلة (٦-١٧) موضحين الحلول المحدودة والغير محدودة عند $\omega = \pm 1$.

بوجه عام نستطيع تكوين الحل $P_0^{(-1)}$ من التراكب الخطى للحلين $P_0^{(+1)}$، $P_\infty^{(+1)}$ عند $\omega = 1$،

$$P_0^{(-1)} = a\,P_0^{(+1)} + b\,P_\infty^{(+1)} \qquad (٦-٢٩)$$

الأطياف المطلوبة المناظرة للقيم المتاحة للكمية β هى بالضبط تلك القيم التى عندها يتصل بسلاسة الحل $P_0^{(-1)}$ مع الحل $P_0^{(+1)}$، مع تلاشى أى مركبة للحل $P_\infty^{(+1)}$، وبالتالى يتحقق شرط الحدود عند النقطتين $\pm 1 = \omega$. (هذا يشبه من الناحية الحسابية عملية تقييم أطياف طاقات الحالات المقيدة فى حالة بئر الجهد المربع، بالباب الرابع. حيث كانت القيم المتاحة للطاقة E_n هى بالضبط تلك القيم التى عندها تتحقق شروط الاتصال عند حدود بئر الجهد، وقد تم ذلك دون إدخال أى مركبة للحل المحتوى على الدالة الأسية التزايدية.)

لتعيين β نستخدم المعادلتين (٦-٢٥)، (٦-٢٧) حتى نستطيع كتابة الصورة العامة للحل كالآتى:

$$P_{\beta m}(\omega) = \left(1-\omega^2\right)^{|m|/2} Z(\omega) \qquad (٦-٣٠)$$

بالتعويض من المعادلة (٦-٣٠) فى المعادلة (٦-١٧) نحصل على

$$\left(1-\omega^2\right)\frac{d^2Z}{d\omega^2} - 2\left(|m|+1\right)\omega\frac{dZ}{d\omega} + \left[\beta - |m|\left(|m|+1\right)\right]Z = 0$$

(٦-٣١)

بوضع

$$Z(\omega) = \sum_0^\infty a_k \omega^k \qquad (٦-٣٢)$$

وبمساواة مجموع معاملات قوى ω المختلفة بالصفر، وعلى وجه الخصوص معاملات ω^k، نجد

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)a_{k+2} &= \\ &\left[k(k-1) + 2k\left(|m|+1\right) + |m|\left(|m|+1\right) - \beta\right]a_k \qquad (٦-٣٣) \\ &= \left[\left(k+|m|\right)\left(k+|m|+1\right) - \beta\right]a_k\end{aligned}$$

المعادلة السابقة تعين معاملات القوى الزوجية للمتوالية Z بدلالة a_0، ومعاملات القوى الفردية بدلالة a_1. إذا كانت المتوالية Z(ω) غير منتهية، بالنسبة للقيم الكبيرة للعدد k، فإن المعادلة (٦-٣٣) تؤدى إلى

$$a_{k+2} \cong a_k$$

ومنه للقيم الكبيرة للعدد k يكون

$$Z(\omega) \approx (1-\omega)^{-1}$$

وعندها تتباعد الدالة $P_{\beta m}$ لبعض قيم |m|. لتحقيق شرط الحدود لابد أن تكون المتوالية منتهية، وبالتالى يجب أن تكون Z(ω) كثيرة حدود وليس

متوالية قوى[1]. من المعادلة (٦-٣٣) تصبح متوالية المعاملات منتهية عند الحد k إذا كان

$$\beta = \ell(\ell+1) \qquad (٦-٣٤)$$

حيث

$$\ell = k + |m| \qquad (٦-٣٥)$$

عندما يكون المقدار

$$k = \ell - |m|$$

مساويا لعدد فردى، وكان $a_0 = 0$ ، يصبح الحل المناظر $P_\ell^m(\omega)$ عبارة عن كثيرة حدود بقوى فردية. أما إذا كان k عدد زوجى، وكان $a_1 = 0$ ، فإن $P_\ell^m(\omega)$ تكون عبارة عن كثيرة حدود بقوى زوجية.

عديدة الحدود $P_\ell^m(\omega)$ معروفة باسم عديدة حدود لاجندر المصاحبة[2]. باستخدام دوال الحالة المناسبة هذه تتحقق شروط الحدود، وتُعَين القيم المناسبة β من المعادلة (٦-٣٤).

عندئذ نكتب القيم المناسبة للمؤثر $\hat{\ell}^2$ على النحو

$$\hbar^2\beta = \hbar^2\ell(\ell+1) \ , \ \ell = 0,1,2,... \qquad (٦-٣٦)$$

حيث من المعادلة (٦-٣٥) ℓ أكبر من أو تساوى $|m|$.

(الحالات $\ell = 0,1,2,3,4,...$ يشار إليها بالرموز S,P,D,F,G,... على الترتيب.)

لأى قيمة معطاة ℓ فإن القيم المناسبة للمؤثر $\hat{\ell}_z$ تساوى

$$\ell_z = \hbar m \ , \ m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm\ell \qquad (٦-٣٧)$$

---

(1) power series (2) associated Legendre polynomial

وهذا يعنى أن عدد القيم المتاحة يساوى $(2\ell+1)$.

٦-٤ الدوال المناسبة والرسم الاتجاهى

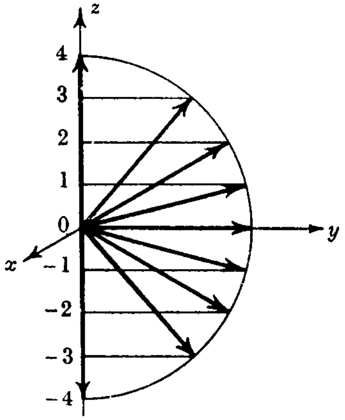
مانوده الآن مقارنة كمية الحركة الزاوية الكمية بنظيرها الكلاسيكى. عند قياس كمية الحركة الزاوية نجد أن القيم المناسبة الكمية تساوى $\sqrt{\ell(\ell+1)}$، مقاسة بوحدات $\hbar$. هذا المقدار يناظر بالتقريب كمية حركة زاوية كلاسيكية مساوية ℓ.

من الوجهة الكلاسيكية، ممكن لمتجه كمية الحركة الزاوية أن يأخذ أى اتجاه يحدد بالزاويتين ϑ ، φ. أيضا، لاتعتمد المركبة -z لكمية الحركة الزاوية الكلاسيكية على الزاوية φ، ولكن تعتمد على ϑ فقط. كما أن قيمة المركبة-z تأخذ نهاية عظمى عندما يكون $\vartheta = 0$، وتساوى حينئذ ℓ، وتكون فى نهايتها الصغرى المساوية $-\ell$ عندما يكون $\vartheta = \pi$. فضلا عن ذلك فإن المركبة-z ممكن أن تأخذ أى قيمة بين النهايتين العظمى والصغرى لها، وتعتمد هذه القيمة على الزاوية ϑ.

من الناحية الكمية، تتشابه كمية الحركة الزاوية وصفيا مع نظيرتها الكلاسيكية، إلا أن القيم المتاحة للمركبة-z لكمية الحركة الزاوية الكمية تأخذ فقط القيم المناظرة للأعداد الصحيحة الواقعة بين النهايتين العظمى والصغرى $\pm\ell$.

يمكن تمثيل كمية الحركة الزاوية اتجاهيا، كما بشكل ٦-٣، حيث نرى بالشكل أن القيم المتاحة للكمية ℓ_z تحدد بالاتجاهات المتاحة لمتجه كمية الحركة الزاوية. يجب التعامل بحذر مع هذا التمثيل الاتجاهى، نظرا لأن الحالات التى قيمة كمية حركتها الزاوية محددة يصاحبها عدم تحديد فى

قياس الاتجاة نتيجة لتتام هذان المتغيران (وهما قيمة كميـة الحركـة الزاويـة واتجاهها).



شكل ٦-٣ التمثيل الاتجاهى لكمية الحركة الزاوية. من الوجهة الكلاسيكية ممكن أن يأخذ متجه كمية الحركة الزاوية أى توجيه. أما من الناحية الكمية يقيد التوجيه بالقيم التى تجعل المركبة-z مساوية لعدد صحيح مضروبا فى $\hbar$.

إذا كان النظام الفيزيائى عبارة عن جسيم يتحرك حول صفر الإحداثيـات تحت تأثير طاقة وضع مركزية فـإن مربـع القيمـة المطلقـة[1] لـدوال الحالـة المناسبة لكمية الحركة الزاويـة تُعْطِى التوزيـع الاحتمـالى لاتجـاه الجسـيم. من الممكن كتابة الدوال المناسبة لأى كمية حركة زاوية فى صورة الـدوال $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ المعروفة باسم التوافقات الكروية[2] . عند تسوية دالة الحالة المناسبة ليكون الاحتمال الكلى لتواجد الجسيم فـى اتجـاه مـا مسـاويا للواحـد الصحيح نجد أن التوافقات الكروية تأخذ الشكل

(1) square modulus (2) spherical harmonics

$$Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) = \iota^{m+|m|}\left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\vartheta)\,e^{\iota m\varphi} \quad (٣٨-٦)$$

ولبعض الحالات البسيطة تؤول المعادلة (٦-٣٨) إلى الصور المبسطة بالجدول ٦-١.

جدول ٦-١ الحالات المناسبة لكمية الحركة الزاوية للموجتين P,S-.

ℓ	m=1	m=0	m= -1
0		$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	
1	$Y_1^{+1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta \frac{e^{\iota\varphi}}{\sqrt{2}}$	$Y_1^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\vartheta$	$Y_1^{-1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin\vartheta \frac{e^{-\iota\varphi}}{\sqrt{2}}$

من الملاحظ أن Y_0^0 تساوى قيمة ثابتة، وهى فى الحقيقة دالـة حالـة مناسبة للمؤثرين $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y$ أيضا، وتلك هى الحالة الخاصة المذكورة بالبند ٦-٣.

عندما m = 0 نحصل على العلاقات

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(\omega) P_{\ell'}(\omega) d\omega = \frac{2}{2\ell+1}\partial_{\ell\ell'} \quad , \quad (٣٩-٦)$$

$$P_\ell(1) = 1 \quad , \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \quad (٤٠-٦)$$

للحالات التى تعين بالكميات m,ℓ نجد أن احتمال أن يأخذ الجسيم الاتجاه φ، ϑ مساويا

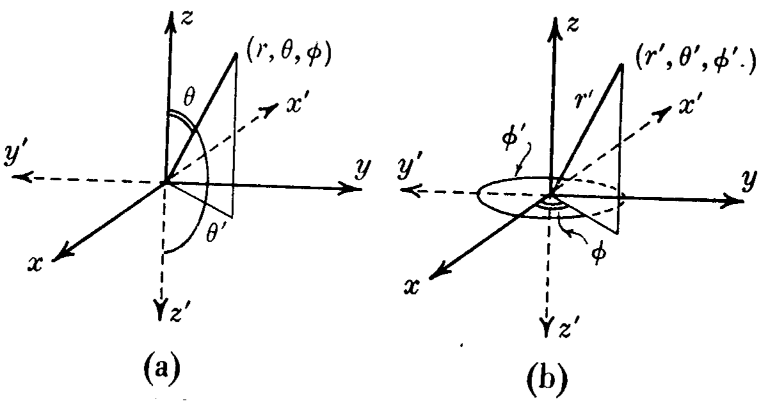
$$P_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = \left|Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)\right|^2 \quad (٤١-٦)$$

واضح من الجدول ٦-١ أننا نحصل على القيمة الأكثر احتمالا للزاوية ϑ (أى التى عندها قيمة الاحتمال السابق أكبر مايمكن) للحالتين $m = \pm 1,\ \ell = 1$ بوضع $\vartheta = \pi/2$. على ذلك يميل مسار الجسيم ليقع فى المستوى x-y، وبالتالى يصبح التوجيه الأكثر احتمالا لمتجه كمية الحركة الزاوية إلى أعلى أو أسفل المحور-z. أما للحالة $m = 0,\ \ell = 1$ نجد أن القيم المستحبة للزاوية ϑ تكون عند $\vartheta = 0$، $\vartheta = \pi$. هذا يعنى أن مسار الجسيم يميل للوقوع عموديا على المستوى x-y ، والاتجاه الأكثر احتمالا لمتجه كمية الحركة الزاوية يصبح عندها فى المستوى x-y. فى هذا الوضع يتلاشى أى اعتماد فيزيائى على الزاوية φ. ومن هنا ندرك المعنى الذى يجب أن نفهم به مغزى التمثيل الاتجاهى الشبه كلاسيكى (شكل ٦-٣) فى محيط الصياغة الميكانيكية الكمية للمسألة.

عند الحد الكلاسيكى تصبح المقادير m, ℓ كبيرة جدا، ويصبح الفرق بين الكميتين ℓ ، $[\ell(\ell+1)]^{1/2}$ صغيرا جدا لدرجة إهماله. وكذلك يكون أيضا الفرق بين الأطياف المستمرة والمتقطعة المتاحة لقيم m، ومن ثم ننتقل بسلاسة إلى التصورات الكلاسيكية المعتادة.

٦-٥ الندية

فى دراستنا للحالات المقيدة لنظام يتحرك فى بعد واحد تحت تأثير طاقة وضع متماثلة (الباب الرابع) كان من الملائم إدخال فكرة الندية. أما فى وقتنا الحالى من الأنسب تعميم هذه الفكرة لتشمل الأبعاد الثلاثة واستخدام الإحداثيات القطبية الكروية.



شكل ٦-٤ الإحداثيات القطبية الكروية للنقطة (r, ϑ, φ) فى محاور إحداثيات منعكسة. r', ϑ', φ' معرفة بالطريقة العادية ولكن بالنسبة إلى الإحداثيات x', y', z' .

نفرض أن موضع الجسيم يعين بالنسبة إلى المتغيرات القطبية العادية بالإحداثيات (r, ϑ, φ). عند انعكاس المحاور إلى (x', y', z') وتعريف r', ϑ', φ' بالطريقة العادية ولكن منسوبة إلى الإحداثيات x', y', z' (استعن بالشكل ٦-٤) نجد

$$
\begin{aligned}
r' &= r \\
\vartheta' &= \pi - \vartheta \\
\varphi' &= \pi + \varphi
\end{aligned}
\qquad (٦-٤٢)
$$

وعليه إذا كان الجسيم فى الحالة الزاوية $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$، فإسنادا للمحاور المنعكسة يكون فى الحالة

$$
\begin{aligned}
Y_\ell^m(\vartheta', \varphi') &= const.\, P_\ell^m(\cos\vartheta')\, e^{\iota m\varphi'} \\
&= const.\, P_\ell^m[\cos(\pi - \vartheta)]\, e^{\iota m(\pi + \varphi)} \\
&= const.\, P_\ell^m(-\cos\vartheta)\, e^{\iota m\varphi}(-1)^{|m|} \\
&= const.\, (-1)^{\ell - |m|}\, P_\ell^m(\cos\vartheta)\, e^{\iota m\varphi}(-1)^{|m|}
\end{aligned}
\qquad (٦-٤٣)
$$

للوصول لهذه المعادلة استخدمنا المعادلة (٦-٤٢)، وللوصول إلى المتساوية الأخيرة أخذنا فىالاعتبار الملاحظات التى تلى المعادلة (٦-٣٥).

بإعادة تجميع المعادلة (٦-٤٣) نصل إلى النتيجة التالية:

$$Y_\ell^m(\vartheta',\varphi') = (-1)^\ell \; Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \qquad (٦-٤٤)$$

نظرا لأن (باستخدام المعادلة (٦-٤٢)) اعتماد أى دالة حالة على r لايتغير بالانعكاس، فإن ندية أى حالة كمية حركتها الزاوية محددة m,ℓ تعين بمعلومية ℓ فقط، وتساوى حينئذ $(-1)^\ell$.

٦-٦ ملخص

القيم المناسبة لمربع كمية الحركة الزاوية $\hat{\ell}^2$ تساوى

$$\hbar^2\ell(\ell+1) \quad ,\ell = 0,1,2,...$$

والمركبة-z، $\hat{\ell}_z$، تساوى

$$m\hbar \quad , \quad m = 0,\pm1,\pm2,...,\pm\ell$$

مسائل ٦

٦-١ استخدم التمثيلات (٦-٢) لتحقيق معادلة المؤثر

$$\left[\hat{\ell}_x,\hat{\ell}_y\right] = \iota\hbar\hat{\ell}_z$$

(هذه المسألة يترتب عليها نتائج مهمة، وعلى وجه الخصوص بالنسبة إلى المغزلية، البند ٨-٣.)

٦-٢ نظام متماسك يدور بحرية حول المحور-z بعزم قصور مقداره I.
بالتعبير عن طاقة النظام بدلالة كمية الحركة الزاوية $\hat{\ell}_z$ وضح أن مستويات الطاقة الممكنة للنظام والدوال المناسبة تعطى بالمعادلتين الآتيتين:

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$u_m(\varphi) = e^{\pm \iota m\varphi}$$

حيث φ هى الزاوية التى تعين توجيه النظام فى المستوى x-y.

٦-٣ نحصل على طاقة الدوران لجزيىء ثنائى الذرة بالنظر إلى الجزيىء على اعتبار أنه نظام متماسك مكون من جسيمين نقطيين يفصلهما مسافة ثابتة، ويدور النظام بحرية حول محور الجذب. بالتعبير عن الطاقة الكلية بدلالة عزم القصور I وكمية الحركة الزاوية وضح أن مستويات الطاقة الدورانية تعطى بالعلاقة

$$E_\ell = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} \ell(\ell+1) \quad , \quad \ell = 0,1,2,\ldots$$

وكذلك وضح أن المستوى المحدد بقيمة ℓ يصاحبه عدد $(2\ell+1)$ من الحالات المناسبة المختلفة المناظرة للقيم الممكنة للمركبة-z لكمية الحركة الزاوية

$$\ell_z = m\hbar \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$$

٦-٤ إذا كان نظام المسألة ٦-٣ واقع فى الحالة

$$\psi(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0(\vartheta,\varphi) + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\vartheta,\varphi)$$

وضح أن طاقة هذه الحالة تساوى E_1، إلا أن (بعد أخذ المجموع على كل القيم الممكنة للزاوية φ) التوزيع الاحتمالى للتوجية ϑ يكون هو نفسه لجسيم فىالحالة الأرضية

$$u_{0,0}(\vartheta,\varphi) = Y_0^0(\vartheta,\varphi)$$

(لاحظ أن احتمال تواجد نظام موجه بزاوية مجسمة $d\Omega(\vartheta,\varphi)$ يساوى

$$(|\psi(\vartheta,\varphi)|^2 d\Omega(\vartheta,\varphi) = |\psi(\vartheta,\varphi)|^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

الباب السابع

طاقة الوضع المركزية[1]

ذرة الهيدروجين

٧-١ الحركة فى مجال طاقة وضع مركزية

يكتب مؤثـر الطاقـة، المسـمى بالهـاميلتونى، لجسـيم كتلتـه m_e يتحـرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية اختيارية V(r) على النحو

$$\hat{H} \rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 + V(r)\right] \qquad (٧-١)$$

ومعادلة القدر المناسب لهذا النظام، طبقاللمعادلة (٣-٨)، هى

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 + V(r)\right]u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi) = E_n u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi) \qquad (٧-٢)$$

بالتعويض عن ∇^2، بدلالة الإحداثيات القطبية الكروية، تؤول المعادلة (٧-٢) إلى

$$\begin{aligned}[&-\frac{\hbar^2}{2m_e}\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \\ &+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\} + V(r)]u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi) = E_n u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi)\end{aligned} \qquad (٧-٣)$$

مـن شـكل المؤثـر $\hat{\ell}^2$، المعادلـة (٦-٨)، نسـتطيع إعـادة صيـاغـة المعادلـة السابقة لتبدو فى الصورة

---

(1) central potential

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hat{\ell}^2(\vartheta,\varphi)}{2m_e r^2}+V(r)\right]u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi) \qquad (٧-٤)$$
$$= E_n u_{E_n}(r,\vartheta,\varphi)$$

بهذا الشكل المبسط يمكن التأكد بسهولة من صحة العلاقة

$$\left[\hat{H},\hat{\ell}^2\right]=0 \qquad (٧-٥)$$

وكذلك صحة العلاقة، استخدم المعادلة (٦-٤)،

$$\left[\hat{H},\hat{\ell}_z\right]=0 \qquad (٧-٦)$$

هذا يعنى إمكانية أن نعرف، فى آن واحد، كلا من الطاقة وكمية الحركه الزاوية ومركبتها فى اتجاه المحور-z لجسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية. بالإشارة إلى كمية الحركة الزاوية ومركبتها فى اتجاء المحور-z بالرمزين m,ℓ، على الترتيب، كما كان الحال فى الباب السادس، حينئذ يمكن الإشارة إلى دالة الحالة المناسبة المناظرة بالرمز $u_{n\ell m}$. ونظرا لأن اعتماد المؤثر $\hat{H}$ على $\vartheta،\varphi$ يظهر فقط فى الحد المحتوى على $\hat{\ell}^2$ فيمكن إذا كتابة

$$u_{n,\ell,m}(r,\vartheta,\varphi)=u_{n,\ell}(r)Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \qquad (٧-٧)$$

بالتعويض من المعادلة (٧-٧) فى المعادلة (٧-٤) يتضح لنا أن $\hat{\ell}^2$ سوف يؤثر فقط على الدالة $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$، وأن ناتج هذا التأثير هو القيم المناسبة $\hbar^2\ell(\ell+1)$. وعندها يمكن اختصار $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ من طرفى المعادلة، ولايتبقى أى اعتماد آخر على الزاويتين $\vartheta،\varphi$، ونحصل على المعادلة

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_e r^2}+V(r)\right]u_{n,\ell}(r)=E_n u_{n,\ell}(r)$$

(٧-٨)

بإجراء التعويض

$$u_{n,\ell}(r)=\frac{\chi_{n,\ell}(r)}{r}$$

(٧-٩)

فى المعادلة (٧-٨) نجد

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\right]\chi_{n,\ell}(r)=E_n\chi_{n,\ell}(r)$$

(٧-١٠)

بكتابة معادلة شرودنجر فى تلك الصورة يصبح من السهل تفسير معناها الفيزيائى.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rightarrow\frac{p_r^2}{2m_e}$$

(٧-١١)

معنى ذلك أن هذا الحد يناظر طاقة الحركة الناشئة من القوة المحورية، حيث p_r هى كمية الحركة المحورية.

وإذا كان الرمز p_t يشير إلى كمية الحركة المستعرضة، فإن مربع كمية الحركة الزاوية يساوى

$$\hbar^2\ell(\ell+1)=(p_t r)^2$$

(٧-١٢)

ولهذا يكون

$$\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_e r^2}=\frac{p_t^2}{2m_e}$$

(٧-١٣)

أى أن هذا الحد يناظر طاقة الوضع الناشئة من قوى الطرد المركزى، الناشئة عن الحركة الدائرية.

ومن هنا نكتب الهاميلتونى ككل فى الشكل المختصر

$$H=\frac{p_r^2}{2m_e}+\frac{p_t^2}{2m_e}+V(r)$$

(٧-١٤)

٧-٢ ذرة الهيدروجين

لدراسة مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين نستخدم معادلة القدر المناسب فى صورتها المعطاة بالمعادلة (٧-٨)، مع التعويض عن V(r) بطاقة الوضع الكولومية

$$V(r) = -\frac{Ze_M^2}{r} \qquad (٧-١٥)$$

حيث Ze، هى شحنة النواة $e_M^2 = e^2/4\pi\varepsilon_o$.

ومنه

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{Ze_M^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m_e r^2}\right]u_{n,\ell}(r) = E_n u_{n,\ell}(r)$$

(٧-١٦)

طريقة حل هذه المعادلة معقدة بعض الشيىء،إلا أن النتيجة التى تتمخض عنها لها أهمية قصوى.ولذلك سوف نلتقط فقط الخطوات الرئيسية للحل. طريقة الحل هذه تشبه عملية إيجاد القيم المناسبة للمؤثر $\hat{\ell}^2$،بالباب السادس.

نظرا لأن اهتمامنا ينصب على الحالات المقيدة بذرة الهيدروجين، فإننا نضع

$$E_n = -|E_n|$$

وبإدخال المتغيرات

$$\alpha_n^2 = \frac{8m_e|E_n|}{\hbar^2} \quad , \quad \rho = \alpha_n r \; , \; \lambda_n = \frac{Ze_M^2}{\hbar}\left(\frac{m}{2|E_n|}\right)^{1/2} \qquad (٧-١٧)$$

تصبح المعادلة (٧-١٦) فى الصورة

$$\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right) + \frac{\lambda_n}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right]u_{n\ell}(\rho) = 0 \qquad (٧-١٨)$$

هذه المعادلة غير محدودة عند النقطتين $\rho = 0$، $\rho = \infty$. يجب حل هذه المعادلة للحصول على قيم مناسبة λ_n منتمية إلى دوال حالة محدودة فى كل الفراغ، وعلى وجه الخصوص عند $\rho = 0$، $\rho = \infty$.

نعتبر أولا الحل عندما تكون قيمة ρ كبيرة. فى هذا الوضع نهمل الحدود المحتوية على ρ، ρ^2 فى مقام المعادلة (٧-١٨) نظرا لصغرها بالنسبة للحدود الأخرى، وبالتالى تؤول المعادلة إلى

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\right)u(\rho) = 0 \qquad (٧-١٩)$$

وعليه لهذه المعادلة حلان مستقلان، وهما

$$u(\rho) \cong \rho^s e^{\pm\rho/2} \qquad (٧-٢٠)$$

وحتى يتحقق شرط الحدود نعتبر فقط الحل المحتوى على الدالة الأسية التناقصية.

لدراسة خواص الحل بالقرب من نقطة الأصل (أى لقيم ρ الصغيرة) نعتبر الحل الذى على الصورة

$$u_{n\ell}(\rho) = \rho^s e^{-\rho/2} L_{n\ell}(\rho) \qquad (٧-٢١)$$

وعندئذ نعوض من المعادلة (٧-٢١) فى المعادلة (٧-١٨) لنحصل على (نهمل لبعض الوقت المعاملان n,ℓ المصاحبان للرمز L)

$$\left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho\{2(s+1) - \rho\}\frac{d}{d\rho} + \{\rho(\lambda_n - s - 1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)\}\right]L(\rho) = 0$$

(٧-٢٢)

وبوضع $\rho = 0$، فإن

$$s(s+1) = \ell(\ell+1) \qquad (٧-٢٣)$$

وعليه فإما أن يكون

$$s = \ell \qquad (٢٤-٧)$$

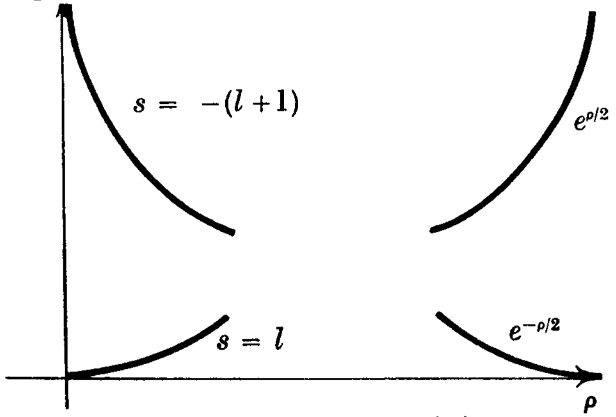
أو يكون

$$s = -(\ell + 1) \qquad (٢٥-٧)$$

أى أننا هنا أيضا حصلنا عند نقطة الأصل على حلين مستقلين. الحل المناظر للمعادلة (٧-٢٤) هو المطلوب فقط، أما الحل الآخر فلايحقق شرط الحدود.

حلول المعادلة (٧-١٨) موضحة بشكل ٧-١، وهى مماثلة تماما للحلول المناظرة للقيم المناسبة للمؤثر $\hat{\ell}^2$ التى قدمناها بالباب السابق.

على وجه العموم، الحل المناظر للوضع $s=\ell$ يتصل بسلاسة مع التراكب الخطى للحلين $e^{-\rho/2}, e^{+\rho/2}$. القيم المناسبة λ_n (ومنه قيم E_n) هى تلك القيم التى تختفى عندها أى مركبة للدالة الأسية التزايدية $e^{+\rho/2}$ من الحل.



شكل ٧-١ رسم تخطيطى لحلول المعادلة (٧-١٨) موضحين الحلول المحدودة والغير محدودة عند النقطتين $\rho = 0$، $\rho = \infty$.

لإيجاد تلك القيم، E_n نعتبر المعادلة (٧-٢٢) عندما يكون $s = \ell$

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+\left\{2(\ell+1)-\rho\right\}\frac{d}{d\rho}+\left\{(\lambda_n-\ell-1)\right\}\right]L(\rho)=0 \qquad (٢٦-٧)$$

بالتعويض عن L(ρ) فى صورة متسلسلة القوى

$$L(\rho)=\sum_{\nu}a_\nu\rho^\nu \qquad (٢٧-٧)$$

وبمساواة مجموع معاملات ρ^ν بالصفر، نحصل على

$$(\nu+1)[\nu+2(\ell+1)]a_{\nu+1}=[\nu+(\ell+1-\lambda_n)]a_n \qquad (٢٨-٧)$$

إذا كانت المتسلسلة غير منتهية فإنه للقيم الكبيرة للكمية ν نجد

$$a_{\nu+1}\cong\frac{1}{\nu}a_\nu \qquad (٢٩-٧)$$

ليصبح

$$L(\rho)=e^\rho \qquad (٣٠-٧)$$

ومن ثم

$$u(\rho)\cong e^\rho e^{-\rho/2} \qquad (٣١-٧)$$

وهذا الحل غير مسموح به لعدم تحقيقه لشرط الحدود.

لتحقيق شرط الحدود لابد أن تكون المتسلسلة منتهية، وهذا ممكن حدوثه إذا كان λ_n بالمعادلة عبارة عن عدد صحيح

$$\lambda_n=n(>\ell) \qquad (٣٢-٧)$$

وحينئذ، باستخدام المعادلة (٧-١٧)، نجد

$$E_n=-\frac{m_eZ^2e_M^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{Z^2e_M^2}{a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (٣٣-٧)$$

حيث a_0 هو نصف قطر بوهر، كما عرفناه بالمعادلة (١-٢٤).

بوضع Z=1 تؤول المعادلة الأخيرة إلى العلاقة الصحيحة المعبرة عن مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين.

٧-٣ الأعداد الكمية[1]

تُعَين مستويات الطاقة بكاملها فى ذرة الهيدروجين بواسطة عدد كمى واحد، وهو العدد الكمى الرئيسى[2]

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

كما هو الحال فى الميكانيكا الكلاسيكية، لكل طاقة محددة بقيمة n يوجد مدى من القيم المتاحة لكمية الحركة الزاوية. كلاسيكيا تتغير كمية الحركة الزاوية فى هذا المدى تغيرا مستمرا، ابتداء من الصفر (للمدار البيضاوى الغير مركزى تماما الذى يمكن اختصاره إلى اهتزازة خطية) حتى القيمة التى تناظر مسار دائرى نصف قطره محدد بقيمة الطاقة.

فى ميكانيكا الكم يبقى المدى كما هو، ولكن يتاح فقط قيم متقطعة معينة لكمية الحركة الزاوية. هذه القيم تحدد بالعدد الكمى المدارى[3] ℓ، حيث من المعادلة (٧-٣٢) نجد أن

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

لكل قيمة ℓ يتواجد فئة من القيم المتقطعة للمركبة-z لكمية الحركة الزاوية، وهذه المركبة هى التى تحدد توجيه متجه كمية الحركة الزاوية بالطريقة المبينة بالباب السابق. هذا التوجيه يعين من العدد الكمى المغناطيسى[4]

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$$

وهذا يعنى أن عدد هذه المركبات يساوى $(2\ell+1)$، كما أن قيمة كل مركبة تساوى

---

(1) quantum numbers (2) principal quantum number
(3) orbital quantum number (4) magnetic quantum number

$$\ell_z = \hbar m$$

وقد أطلق على m اسم العدد الكمى المغناطيسى، نظرا لنتيجة تأثير القيم المختلفة للعدد m عند تطبيق مجال مغناطيسى خارجى، حيث نرى انقسام للحزمة الذرية التى كمية حركتها الزاوية محددة بالعدد ℓ إلى عدد $(2\ell+1)$ من الحزم. سنتعرض لدراسة هذه الظاهرة فى البند ٨-١، بالباب الثامن.

الأعداد الكمية الثلاث n,ℓ,m تعين دالة حالة مناسبة وحيدة. نظرا لوجود عدد معين من دوال الحالة المناسبة المستقلة لكل مستوى طاقة معين فإننا نطلق على هذه المستويات بأنها متفسخة[1]. أى أن كل مستوى طاقة يتركب من عدد معين من المستويات. درجة التفسخ هى عدد الحالات المناسبة المنتمية إلى هذا المستوى. فمثلا، لمستوى n درجة التفسخ تساوى

$$D_n = \sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = n^2$$

العلاقات المميزة للأعداد الكمية n,ℓ,m، بالإشتراك مع فكرة اللف الذاتى[2] (المغزلية) تُكون الأساس الفيزيائى لوصف الجدول الدورى للعناصر، الذى سيأتى ذكره فى البند ٨-٥.

٧-٤ الدوال المناسبة

تكتب دوال الحالة المناسبة المسواة والمحددة بقيم n,ℓ,m، كما يلى:

$$u_{n,\ell,m}(r,\vartheta,\varphi) = N_{n\ell}\, u_{n\ell}(r)\, Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \qquad (٧-٣٤)$$

حيث $N_{n\ell}$ هو معامل التسوية.

تبدو الدالة $u_{n\ell}(r)$ بدلالة ρ فى الصورة

(1) degenerate (2) intrinsic spin

$$u_{n,\ell}(r) = e^{-\rho/2}\rho^{\ell} L_{n\ell}(\rho) \qquad (٧-٣٥)$$

عديدات الحدود L معروفة باسم دوال لاجندر المصاحبة، وعادة ماتكتب في الشكل

$$L^{2\ell+1}_{n+\ell}(\rho)$$

في المعادلة (٧-٣٥) يأتي معظم الاعتماد المحوري من المعامل الأسي.

بالتعويض من المعادلة (٧-٣٣) في المعادلة (٧-١٧) نجد

$$\alpha_n = \frac{2Z}{a_0 n} \ , \ \rho = \alpha_n r \qquad (٧-٣٦)$$

وعليه تؤول الدالة المحورية إلى الشكل التقريبي (بإهمال المعامل o في a_o)

$$u_n(r) \approx e^{-\rho/2} = \exp\left[-\frac{Zr}{an}\right] \qquad (٧-٣٧)$$

في الحالة الأرضية بذرة الهيدروجين (n=1;Z=1) تُعْطِي المعادلة السابقة الدالة الأسية التناقصية، $e^{-r/a}$ التي يعزو إليها انحصار الجسيم، بالتقريب، في المنطقة المتاحة كلاسيكيا، $r < a$ (انظر شكل ٣-١). بذلك يحدث تخلل معتبر لحاجز الجهد بواسطة ذيل التوزيع الأسي[1]. بزيادة إثارة الجسيم يزداد معها قيمة n ويشيع تواجد الجسيم في مدى أكبر على طول المسافة r. هذا يتفق مع اتساع مدى طاقة الوضع ومن ثم اتساع المنطقة المتاحة كلاسيكيا مع زيادة الطاقة.

بزيادة Z تُقيد حركة الجسيم في مدى أصغر، كما يجب أن نتوقع. نظرا لأن a تتناسب عكسيا مع m_e (كتلة الجسيم المقيد) فإن الجسيم الأكبر ثقلا تُقيد حركته في مدى أصغر.لذلك عند استبدال الإلكترون بميزون- μ [2]

(1) tail of the exponential distribution (2) μ -meson

(انظر الجدول ١١-١) فإن مقياس النظام ككل يقل بقدر النسبة بين كتلة الإلكترون والميزون- μ. هذه النسبة تساوى حوالى 200 .

من الأمثلة البسيطة على دوال الحالة المسواة الدالتان

$$u_{100} = \frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{Zr}{a}\right] \qquad (٧-٣٨)$$

$$u_{200} = \frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{Z}{2a}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a}\right) \exp\left[-\frac{Zr}{2a}\right] \qquad (٧-٣٩)$$

لهاتين الدالتين يتغير احتمال تواجد الجسيم عند نقطة الأصل بمقدار a^{-3} أو بمقدار m_e^3 (a تتناسب عكسيا مع m_e)، حيث m_e هى كتلة الجسيم المقيد.

٧-٥ حركة مركز الكتلة(1)

حتى الآن تم التعامل مع النواة كجسيم ثابت فى مكانه ويتحرك حوله الإلكترون. فى حقيقة الأمر يوجد تفاعل متبادل بين النواة والإلكترون، ونتيجة لهذا التفاعل يتحرك النظام ككل بحرية.

كلاسيكيا، يمكن اختصار حركة تلك النظام إلى الحركة الحرة للكتلة الكلية للنظام، الممركزة عند مركز الكتلة، بالإضافة إلى الحركة النسبية(2) المكافئة لحركة جسيم بكتلة مختصرة(3) تحت تأثير طاقة وضع ثابتة. سوف نوضح الآن أن هذا التصور يسرى أيضا على الأنظمة الكمية.

نعتبر جسيمين إحداثيات كل منهما (x_1,y_1,z_1)، (x_2,y_2,z_2)، وكتلتيهما m_1,m_2، على الترتيب. نفرض أن الجسيمين يتحركان تحت تأثير طاقة وضع تعتمد فقط على المسافة بينهما. يكتب الهاميلتونى لهذا النظام فى الصورة

---

(1) centre of mass motion (2) relative motion (3) reduced mass

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2_{(1)} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2_{(2)} + V(x_1 - x_2) \qquad (٧-٤٠)$$

والمعادلة التى تعطى مستويات الطاقة هى

$$\hat{H}(x_1, x_2)U(x_1, x_2) = E''U(x_1, x_2) \qquad (٧-٤١)$$

بإدخال المتغيرات

$$M = m_1 + m_2 \ , \qquad (٧-٤٢)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = M X, \ldots, \text{ إلخ }, \qquad (٧-٤٣)$$

$$x_1 - x_2 = x, \ldots, \text{ إلخ }, \qquad (٧-٤٤)$$

حيث (X,Y,Z) هى إحداثيات مركز الكتلة، (x,y,z) هى الإحداثيات النسبية.

حينئذ يكون

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} \qquad (٧-٤٥)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X} \qquad (٧-٤٦)$$

وبالمثل

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X} \qquad (٧-٤٧)$$

وعليه من السهل توضيح أن

$$\frac{1}{m_1}\nabla^2_{(1)} - \frac{1}{m_2}\nabla^2_{(2)} = \frac{1}{\mu}\nabla^2_x + \frac{1}{M}\nabla^2_X \qquad (٧-٤٨)$$

حيث μ هنا هى الكتلة المختصرة،

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (٧-٤٩)$$

باستخدام المتغيرات الجديدة تؤول معادلة شرودنجر إلى

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2_X - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_x + V(x)\right]U(x,X) = E''U(x,X) \qquad (٧-٥٠)$$

ونظرا لأنه لايوجد بداخل القوسين المربعين أى حد يعتمد على كل من X,x معا، فإننا نعتبر الحلول التى على الصورة

$$U(x,X) = u(x)w(X) \qquad (٧-٥١)$$

بالتعويض من المعادلة (٧-٥١) فى المعادلة (٧-٥٠) والقسمة على $u(x)w(X)$، نحصل على

$$\frac{1}{w(X)}\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_X^2\right]w(X) + \frac{1}{u(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_x^2 + V(x)\right]u(x) = E''$$

(٧-٥٢)

يجب أن يتغير الحدان الموجودان على يسار المعادلة مع تغير X أو x، على الترتيب. وعليه لابد أن يساوى كل حد منهما مقدارا ثابتا، أى أن المعادلة تتجزأ إلى

$$\frac{1}{w(X)}\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_X^2\right]w(X) = E'' - E = E' \qquad (٧-٥٣)$$

$$\frac{1}{u(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_x^2 + V(x)\right]u(x) = E \qquad (٧-٥٤)$$

مر علينا من قبل هاتين المعادلتين. فالمعادلة (٧-٥٣) هى ببساطة معادلة القدر المناسب للطاقة لجسيم كتلته M يتحرك بحرية. واضح هنا أن أطياف الطاقة تظهر بصورة متصلة، كما فى الوضع الكلاسيكى، وذلك حتى يتحرك مركز الكتلة بحرية حاملا أى مقدار من الطاقة. أما المعادلة (٧-٤٥) فهى معادلة القدر المناسب للطاقة الخاصة بالحركة النسبية. كما فى الوضع الكلاسيكى فهى تكافىء معادلة القدر المناسب لجسيم بكتلة مساوية للكتلة المختصرة μ، ويتحرك تحت تأثير طاقة وضع ثابتة.

عند استبدال V بطاقة الوضع الكولومية فإن القيم المناسبة للطاقة، المعينة بالمعادلة (٧-٥٤)، تُعبر عن مستويات الطاقة الفعلية (نتيجة لأخذ

حركة النـواة فـى الاعتبـار) فـى ذرة الهيدروجيـن. نحصـل علـى حل هـذه المعادلة ببساطة من المعادلة (٧-٣٣) باستبدال m_e بالكمية

$$m_e \rightarrow \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

حيث m_p هى كتلة البروتون. هذا التصحيـح صغير لدرجـة أنـه يدخـل فـى نطاق الأخطاء التجريبية (انظر البند ٨-٦).

عمليـة تحليـل المسـألة بتلك الصـورة، أى إلـى حركـة مركــز الكتلــة وحركة نسبية، له أهمية مطلقة عند دراسـة عمليـات التصـادم (الاسـتطارة) التى سيرد ذكرها فى الباب العاشر. من التعريـف (٧-٤٩) يظهـر جليـا أن الكتلة المختصرة μ تساوى إحدى كتلتى الجسيمين، وليكن مثلا تسـاوى m_1، فى حالــة مـاتكون كتلـة الجسيم الآخـر m_2 مسـاوية مالانهايـة. وعلـى وجـه العموم فإن تقريبنا للمسألة على اعتبار أن أحد الجسيمين ثـابت فـى مكانـه يعد من التقريبات الجيدة مادامت كتلة أحـد الجسـيمين (الهـدف) كبيرة جدا بالنسبة للجسيم الآخر (المقذوف).

٧-٦ ملاحظات عامة

يعد استنتاجنا للمعادلة (٧-٣٣)، للحصول علـى مسـتويات الطاقـة فـى ذرة الهيدروجين، خير برهان على صحة الصياغة التى قدمناها للتعامل مع ميكانيكا الأنظمة الكمية.

من الأهمية بمكان تكرار أن تصور بوهر غير متوافق تماما نظرا لأنه بنى علـى أسـاس إدخـال بعــض القواعـد المبهمــة علــى النظريــة الميكانيكيــة الكلاسيكية. هــذه القواعـد لاتتفـق علـى الإطـلاق مـع فحـوى الفيزيـاء الكلاسيكية. أما الآن فقد وضعنا صياغتنا على أساس فيزيائى ثابت الدعائم،

طبقا لنظرية متوافقة تماما، حتى يتسنى لنا دراسةالأنظمة الصغيرة التى يتولد فيها اضطراب معتبر من جراء عمليات القياس.

بإعادة استنتاج هذه الصياغة الكمية على هذا الأساس نكون فى وضع يسمح لنا بتطبيق ميكانيكا الكم بمنتهى الثقة فى أى مجال يستحيل فيه إهمال قيمة ثابت بلانك. هذه المجالات تشمل علم الأطياف الذرية، والكيمياء ككل من ناحية المبدأ، وأيضا التركيب التفصيلى للمواد الصلبة شاملين خواصها الكهربية والمغناطيسية، وحتى فى العمل الداخلى لأنوية الذرات كما سيأتى لاحقا.

مسائل ٧

٧-١ دالة توزيع الاحتمال النسبى لقيمة كمية الحركة الخطية لذرة الهيدروجين فى حالتها الأرضية هى

$$P_{u_{100}}(p) = |\phi(p)|^2$$

حيث من المعادلتين (٣-٣٩)، (٧-٣٨)

$$\phi(p) = \iiint \exp[-\iota\, p.r/\hbar]\exp[-r/a]r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

وضح أن

$$\phi(p) \approx \frac{1}{\left[p^2 + (\hbar/a)^2\right]^2}$$

(لتقييم التكامل اعتبر المحور-z المناظر للمتجه **r** فى نفس اتجاه **p**. بذلك يكون التكامل على الزاويتين ϑ، φ مماثل للتكامل الذى تم إجراؤه فى استنتاج المعادلة (١٠-٣١)، بالباب العاشر. يمكن إجراء التكامل على r المتبقى بالتجزيء.)

الباب الثامن

المغزلية والإحصاء[1]

٨-١ تأثير زيمان[2]

نعتبر الحالة التى نضع فيها ذرة الهيدروجين بداخل مجال مغناطيسى ثابت وضعيف **B**. لدراسة التأثيرات الكمية لمثل هذا المجال يجب أن نضيف إلى مؤثر الطاقة (المسمى بالهاميلتونى) حدا يعبر عن طاقة التفاعل بين الذرة والمجال المغناطيسى. طبقا لمبدأ التناظر، ف(١)، (البند ٣-٣)، يعبر عن هذا الحد الجديد بنفس شكله الكلاسيكى.

للوصول إلى التعبير الذى يصف هذا الحد الجديد نفرض أن النواة ثابتة فى مكانها ويدور حولها الإلكترون فى مسار كلاسيكى دائرى. يُنظر إلى حركة الإلكترون الدائرية حول النواة كمسار مغلق للتيار. المسار المغلق للتيار يكافىء ثنائى قطب مغناطيسى[3] عزمه المغناطيسى μ (μ متجه عمودى على المستوى المغلق).

طاقة التفاعل تساوى

$$V_B = \mu \cdot B \qquad (١-٨)$$

إذا كان نصف قطر المسار الدائرى هو r، وكمية حركة الإلكترون هى p، فإن سرعة الإلكترون فى مداره تصبح مساوية p/m_e. وحيث أن شدة التيار الكهربى تعين بقيمة الشحنة التى تمر فى الثانية الواحدة على نقطة ثابتة فى المسار، فإن شدة التيار تساوى

---

(1) spin and statistics (2) Zeeman effect (3) magnetic dipole

$$j = \frac{e(p/m_e)}{2\pi r} \qquad (٢-٨)$$

نحصل على العزم المغناطيسى الناتج عن الحركة الدائرية للشحنة من حاصل ضرب التيار فى المساحة التى يرسمها المسار المغلق، أى أن

$$|\mu| = \pi r^2 j \qquad (٣-٨)$$

$$= \frac{e r p}{2 m_e} \qquad (٤-٨)$$

ومنه

$$\mu = \frac{e}{2m_e} r \wedge p = \frac{e}{2m_e} \ell \qquad (٥-٨)$$

حيث ℓ هى كمية الحركة الزاوية. المعادلة (٨-٥) نتيجة عامة ليست مقيدة على المسارات الدائرية فقط.

عندئذ تؤول طاقة التفاعل إلى

$$V_B = \frac{e}{2m_e} B \cdot \ell \qquad (٦-٨)$$

باستبدال ℓ بالمؤثر الميكانيكى الكمى المناظر تصبح المعادلة (٨-٦) هى المعبرة عن طاقة التفاعل المطلوبة.

بأخذ المحور-z فى نفس اتجاه المجال المغناطيسى B فإن الهاميلتونى يساوى

$$\hat{H}_B = \hat{H} + \frac{e}{2m_e} B \hat{\ell}_z \qquad (٧-٨)$$

حيث $\hat{H}$ هو الهاميلتونى للذرة الغير مضطربة المعطى بالمعادلة(٧-١٦).

فى وجود مجال مغناطيسى خارجى **B**، تعين مستويات الطاقة فى الذرة باستخدام الهاميلتونى الجديد (٨-٧)

$$\hat{H}_B u_n(r,\vartheta,\varphi) = E_n^B u_n(r,\vartheta,\varphi) \qquad (٨-٨)$$

من الملاحظ أن الحد الإضافى بالهاميلتونى $\hat{H}_B$ يحتوى فقط على المؤثر $\hat{\ell}_z$، ونعلم من قبل أن دوال الحالات المناسبة للمؤثر $\hat{H}$ هى أيضا دوال حالات مناسبة للمؤثر $\hat{\ell}_z$. هذا يعنى أن دوال الحالات المناسبة، u_n، للمؤثر $\hat{H}_B$ هى أيضا دوال حالات مناسبة للمؤثر $\hat{H}$. أطلقنا على هذه الدوال الرمز $u_{n\ell m}$ بالبند ٧-٤. لهذا يكون

$$\begin{aligned} \hat{H}_B u_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi) &= \left[\hat{H} + \frac{e}{2m_e} B\hat{\ell}_z\right] u_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi) \\ &= \left(E_n + \frac{e}{2m_e} B\hbar m\right) u_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned} \qquad (٩-٨)$$

حيث E_n هى قيم مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين الغير مضطربة، المعادلة (٧-٣٣).

المعادلة (٨-٩) تعنى أنه لأى قيم معطاة n,ℓ يوجد عدد $2\ell+1$ من الحالات المختلفة. بطريقة أخرى نقول أن المستوى E_n قد انقسم الآن إلى عدد $2\ell+1$ من المستويات المنفصلة. فرق الطاقة بين أى مستويين متتاليين يساوى

$$\Delta E = \frac{e\hbar B}{2m_e} \qquad (١٠-٨)$$

لوحظ هذا التأثير عمليا عند تطبيق مجال مغناطيسى خارجى. ومن هنا ندرك سبب إطلاق اسم العدد الكمى المغناطيسى على m بالبند ٧-٣.

طبقا للمعادلة (٨-٩) لانتوقع حدوث انقسام لمستوى طاقة الحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين $(n=1, \ell=0, m=0)$. ومع ذلك فقد لوحظ عمليا انقسام هذا المستوى إلى اثنين من المستويات. إذا حاولنا تفسير هذا الانقسام

بنفس الأسلوب السابق فلابد أن يكون الانقسام قد نشأ من كمية حركة زاوية j، مثلا، تحقق العلاقة

$$2j+1=2$$

ومنه

$$j=1/2 \qquad (٨-١١)$$

إلا أننا قد بينا بالباب السادس بوجه عام أن القيم المتاحة لكمية الحركة الزاوية المدارية تأخذ فقط أعدادا صحيحة، مما يناقض النتيجة السابقة. هذا يفرض علينا ضرورة إجراء بعض التعميم على صياغتنا الحالية. السبيل إلى ذلك هو إدخال نوع جديد من المؤثرات، ألا وهو المؤثرات المصفوفة[1].

٨-٢ المؤثرات المصفوفة

المصفوفة هى ترتيب لعدد $(n\times m)$ من العناصر. n,m ممكن أن يأخذا أى مقادير. سنتعامل هنا بوضوح مع أبسط الحالات، وهى التى فيها $n=m=2$. لهذا

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\langle 1|\hat{A}|1\rangle & \langle 1|\hat{A}|2\rangle\\ \langle 2|\hat{A}|1\rangle & \langle 2|\hat{A}|2\rangle\end{pmatrix} \qquad (٨-١٢)$$

الأعداد

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle \quad ,i=1,2,\ldots,n \;;\; j=1,2,\ldots,n$$

تسمى عناصر المصفوفة[2].

(1) matrix operators (2) matrix elements

الرمز $|i>$ يشير إلى الصف والرمز $<j|$ يشير إلى العمود الذى يظهر فيهما العنصر.

المؤثر المصفوف يؤثر على متجه عبارة عن عمود به n من الأعداد (المركبات). عندما n=2 نكتب المتجه كالآتى:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle 1|\psi\rangle \\ \langle 2|\psi\rangle \end{pmatrix} \qquad (١٣-٨)$$

بالتأثير بالمؤثر المصفوف $\hat{A}$ على المتجه $|\psi>$ ينتج متجه جديد $|\phi>$

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle \qquad (١٤-٨)$$

تحدد مركبات المتجه $|\phi>$ من العلاقة

$$\sum_{j=1}^{n} \langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle = \langle i|\phi\rangle \ , \ i = 1,2,\ldots,n \qquad (١٥-٨)$$

تُعَرَّف القيم المناسبة للمؤثر المصفوف $\hat{A}$ (بطريقة تشبه تماما المعادلة (٢-٧)) بواسطة المعادلة

$$\hat{A}|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \qquad (١٦-٨)$$

حيث a_n، u_n هى القيم المناسبة والمتجهات المناسبة للمؤثر المصفوف $\hat{A}$، على الترتيب.

إذا كان $\hat{A}$ مصفوف قطرى[1]

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad (١٧-٨)$$

من السهل، بالتعويض فى المعادلة (٨-١٦)، التأكد من أن a_1,a_2 هى القيم المناسبة المنتمية للمتجهات المناسبة

---

(1) diagonal matrix

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\; ; \;\; |u_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (٨-١٨)$$

حاصل ضرب أى مصفوف $\hat{A}$ فى عدد c يولد مصفوفا جديدا، كل عنصر فيه عبارة عن العنصر المناظر فى المصفوف $\hat{A}$ مضروبا فى c،

$$\langle i|c\hat{A}|j\rangle = c\langle i|\hat{A}|j\rangle \qquad (٨-١٩)$$

حاصل ضرب مصفوفان $\hat{B}$ ، $\hat{A}$ على النظم (n×n) عبارة عن مصفوف على النظم (n×n) أيضا

$$\hat{A}\,\hat{B} = \hat{C} \qquad (٨-٢٠)$$

حيث عناصر المصفوف C هى

$$\langle i|\hat{C}|\,j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle i|\hat{A}|k\rangle\langle k|\hat{B}|\,j\rangle \qquad (٨-٢١)$$

من خواص المصفوفات نرى، كما فى المؤثرات التفاضلية (انظر المعادلتين (٢-١٣)، (٢-١٤))، أنه بوجه عام يكون

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0 \qquad (٨-٢٢)$$

يتميز مصفوف الوحدة I بأن كل عناصره تساوى الصفر، ماعدا العناصر القطرية فكل منها يساوى الواحد الصحيح،

$$\hat{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad (٨-٢٣)$$

مرة ثانية، من السهل التأكد، مستخدمين المعادلة (٨-١٢)، أنه لأى مصفوف $\hat{A}$ يكون

$$\hat{A}\,\hat{I} = \hat{I}\hat{A} = \hat{A} \qquad (٨-٢٤)$$

يعد هذا مثالا على معادلة المؤثر المصفوف، المشابهة للمعادلة (٢-١٧)، التى تطبق مباشرة على المؤثرات ولاتعتمد على شكل المتجه الذى تؤثر عليه.

لكل متجه <ψ| يوجد متجه مصاحب[1] |ψ> ، الذى له المركبات

$$\langle\psi|i\rangle \equiv \langle i|\psi\rangle^* \qquad (٨-٢٥)$$

حاصل الضرب القياسى لمتجهين هو

$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n}\langle\phi|i\rangle\langle i|\psi\rangle \qquad (٨-٢٦)$$

يقال أن متجهين متعامدان[2]، إذا كان

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0 \qquad (٨-٢٧)$$

ويقال أن المتجه مُسَوًّى عندما يكون

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n}\langle\psi|i\rangle\langle i|\psi\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n}\left|\langle i|\psi\rangle\right|^2 = 1 \qquad (٧-٢٨)$$

واضح أن المؤثرات المصفوفة تتمتع بكل الخـواص العامـة للمؤثـرات التفاضليـة ، المذكـورة بالبـاب الثـانى، ويمكـن استخدامها لوصـف عمليـات الملاحظة بالطريقة المقدمة بالباب الثـالث. علـى وجـه الخصـوص نسـتطيع تطبيق البنـد ٣-٢ بكاملـه، دون أدنـى تغيير، مـاعدا المعادلـة (٣-١) التـى نكتبها الآن على النحو

$$\bar{a}_\psi = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\psi|i\rangle\langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle}{\sum_{i=1}^{n}\langle\psi|i\rangle\langle i|\psi\rangle} \qquad (٨-٢٩)$$

وهذا يعد تعميما واضحا، وخصوصا فى ضوء المعادلة (٨-٢٥).

٨-٣ المغزلية

من التعريفات الخاصة بمؤثرات كمية الحركة الزاوية، المعطاة بالبند

---

(1) adjoint vector (2) orthogonal

٦-١، نجد أن علاقات المبادلة تؤول إلى

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=\iota\hbar;[\hat{x},\hat{p}_y]=[\hat{p}_x,\hat{p}_y]=[\hat{x},\hat{y}]=0;\ldots, \quad \text{إلخ} \qquad (٨-٣٠)$$

ومنه (المسألة ٦-١)

$$[\hat{\ell}_x,\hat{\ell}_y]=\iota\hbar\hat{\ell}_z;[\hat{\ell}_y,\hat{\ell}_z]=\iota\hbar\hat{\ell}_x;[\hat{\ell}_z,\hat{\ell}_x]=\iota\hbar\hat{\ell}_y \qquad (٨-٣١)$$

علاقات المبادلة هذه هى الخاصية المُعَرِّفة لأى كمية حركة زاوية.

نعتبر الآن المصفوفات

$$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-\iota\\\iota&0\end{pmatrix};\hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad (٨-٣٢)$$

المسماة بمصفوفات اللف لباولى[1]. باستخدام تعريفات الباب السابق يمكن التأكد من أن المصفوفات

$$\hat{\ell}_x=\frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x;\hat{\ell}_y=\frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_y;\hat{\ell}_z=\frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z \qquad (٨-٣٣)$$

تحقق علاقات المبادلة (٨-٣١)، كما يمكن التأكد مباشرة من صحة العلاقة

$$\hat{\ell}^2=\hat{\ell}_x^2+\hat{\ell}_y^2+\hat{\ell}_z^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad (٨-٣٤)$$

وكذلك من صحة العلاقات

$$[\hat{\ell}_x,\hat{\ell}^2]=[\hat{\ell}_y,\hat{\ell}^2]=[\hat{\ell}_z,\hat{\ell}^2]=0 \qquad (٨-٣٥)$$

من المعادلتين (٨-١٧)، (٨-١٨) نجد أن القيم المناسبة للمؤثر المصفوف $\hat{\ell}_z$ هى

$$\pm\frac{1}{2}\hbar \qquad (٨-٣٦)$$

التى تنتمى إلى متجهات الحالات المناسبة

---

(1) Pauli spin matrices

$$|u_{+1/2}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |u_{-1/2}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (٨-٣٧)$$

وهما أيضا متجهان مناسبان للمؤثر $\hat{\ell}^2$. عند التأثير بهذا المؤثر على أى من هذين المتجهين نحصل على النتيجة

$$\hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \qquad (٨-٣٨)$$

العلاقتان (٨-٣٧)، (٨-٣٨) هما على وجه التحديد العلاقتان (٦-٣٦)، (٦-٣٧) التى حددنا فيهما الأعداد الكمية لكمية الحركة الزاوية بالباب السادس. إلا أننا عند دراستنا لكمية الحركة الزاوية المدارية قيدنا القيم المتاحة للأعداد الكمية m,ℓ على الأعداد الصحيحة فقط.

آخذين فى الاعتبار علاقات المبادلة (٨-٣١) كخاصية مُعَرِّفة لكميات الحركة الزاوية، والسماح بتمثيل المؤثرات بمصفوفات نلاحظ أننا لانستطيع تغطية إتاحة أن تأخذ الأعداد الكمية m,ℓ القيم

$$\ell = 1/2 \quad ; \quad m = \pm 1/2 \qquad (٨-٣٩)$$

نظرا لأن أنصاف القيم الصحيحة لاتصاحب الحركة الزاوية المدارية فلابد أنها تصاحب حركة زاوية أخرى نطلق عليها اسم الحركة الزاوية الذاتية (المغزلية) للجسيمات نفسها. وعلى وجه الخصوص فإن الإلكترون يجب أن تكون مغزليته مساوية $\frac{1}{2}\hbar$ (عندما نقول أن مغزلية الإلكترون هى $s\hbar$ فهذا يعنى أن كمية حركته الزاوية المغزلية تساوى $\sqrt{s(s+1)}\,\hbar$ أى تساوى لإلكترون واحد $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$.)

علـى ذلـك فبالإضافـة إلـى المعـامل $\psi(r,\vartheta,\varphi)$ الـذى نعيـن بواسـطته التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ يجب علـى دالـة حالـة الإلكترون أن تحتوى أيضا على المعامل

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (٨-٤٠)$$

المعبر عـن حركـة الإلكترون الذاتيـة. ومـن هنـا يصبـح احتمـالَىْ أن تـأخذ المركبة-z لكمية الحركة الزاوية الذاتية القيمتين $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$ مساويان (بتعميم المعادلة (٣-٣٩))

$$P_\psi(+1/2) = \left|\sum_{i=1}^{2} \langle u_{+1/2}|i\rangle\langle i|\psi\rangle\right|^2 = a^2 \qquad (٨-٤١)$$

$$P_\psi(-1/2) = b^2 \qquad (٨-٤٢)$$

وشرط التسوية هو

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle\psi|i\rangle\langle i|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad (٨-٤٣)$$

هذا يؤكد أن مجموع الاحتمالين الممكنين للحركـة المغزليـة يسـاوى الواحد الصحيح، كما يجب أن يكون.

عند هذه المرحلة من الأنسب تعديل بعض الرموز التـى أدخلناهـا من قبل، وذلك بغرض التبسيط. فبدلا من $|u_{\pm1/2}\rangle$ نكتب $|\pm1/2\rangle$ للإشارة إلـى المتجهين المناسبين للمغزلية الـذى ينتمـى إليهمـا القيـم المناسـبة للمصفوف القطـرى $\hat{\ell}_z$ (أو $1/2\,\hat{\sigma}_z$). لهذا فـإن معادلـة القدر المناسـب تصبـح كمـا يلى:

$$1/2\,\hat{\sigma}_z|\pm1/2\rangle = \pm1/2\,|\pm1/2\rangle \qquad (٨-٤٤)$$

زيادة على ذلك فإننا نستخدم الرمزين $\pm 1/2$ للإشارة إلى الصفوف أو الأعمدة التى تظهر بها كقيم مناسبة، أى أن

$$\langle 1|\psi\rangle \equiv \langle +1/2|\psi\rangle$$
$$\langle 2|\psi\rangle \equiv \langle -1/2|\psi\rangle \qquad (٨-٤٥)$$

على ضوء الرموز سالفة الذكر نكتب المعادلة (٨-٤١) كالآتى:

$$P_\psi(+1/2) = |\langle +1/2|\psi\rangle|^2 \qquad (٨-٤٦)$$

لتصبح قريبة الشبه بالمعادلة (٣-٣٨).

هذه الرموز متوافقة تماما مع الرموز القديمة. فعلى سبيل المثال المعادلة

$$\langle +1/2|-1/2\rangle = 0 \qquad (٨-٤٧)$$

تؤدى طبقا للرموز القديمة إلى تلاشى المركبة الأولى للمتجه $|u_{-1/2}\rangle$

$$\langle 1|u_{-1/2}\rangle = 0 \qquad (٨-٤٨)$$

وتؤدى أيضا إلى أن حاصل الضرب القياسى للمتجهين $|u_{-1/2}\rangle$، $|u_{+1/2}\rangle$ يساوى صفرا

$$\langle u_{+1/2}|u_{-1/2}\rangle = 0 \qquad (٨-٤٩)$$

وهاتان النتيجتان صحيحتان.

والآن تكتب المركبة-z لكمية الحركة الزاوية الكلية[1]، لإلكترون فى ذرة ما، على النحو

$$\hat{j}_z = \hat{\ell}_z + \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_z \qquad (٨-٥٠)$$

---

(1) total angular momentum

حيث $\hat{\ell}_z$، $1/2\,\hbar\hat{\sigma}_z$ هما المساهمة من الحركـ ن المدارية والمغزلية، على الترتيب. على أية حال فإن الوضـع الجديد لايؤثر على حساب مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين، وذلك لأن الهاميلتونى لايعتمد على المؤثرات الخاصة بالحركة المغزلية. ومع ذلك يوجد اثنان من دوال الحالة المناظرة للحالة الأرضية E_1، وهما

$$u_{100}(r)|+1/2\rangle \;\; ; \;\; u_{100}(r)|-1/2\rangle \qquad (٥١-٨)$$

تمدنا الحركة المغزلية بالأساس لفهم انقسام زيمان[1] للحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين. لتمام التوافق مع النتاج المعملية لابد من استبدال الهاميلتونى (٨-٧) بالهاميلتونى الجديد

$$\hat{H}_\sigma = \hat{H} + \frac{e}{2m_e}B\left(\hat{\ell}_z + \hbar\hat{\sigma}_z\right) \qquad (٥٢-٨)$$

دالتا الحالة المناسبتان (٨-٥١) هما أيضا دالتان مناسبتان للنظام الجديد (الهاميلتونى (٨-٥٢)) وذلك لأن متجهى المغزلية $|u_{\pm 1/2}\rangle$ يعتبران متجهَىْ حالة مناسبان للمؤثر $\hat{\sigma}_z$.

لهذا النظام الجديد تبدو مستويات الطاقة المناظرة فى الصورة

$$E_1^\sigma = E_1 \pm \frac{e\hbar}{2m_e}B \qquad (٥٣-٨)$$

الحد الإضافى $\pm\frac{e\hbar}{2m_e}B$ نشأ نتيجة للتأثير بالمؤثر

$$\frac{e\hbar}{2m_e}B\hat{\sigma}_z$$

(1) Zeeman splitting

علـى متجهى الحالـة المغزليـة المناسـبين $\langle 1/2 \pm|$. هـذا يمدنـا بالانقسـام المطلوب للحالة الأرضية إلى اثنين من المستويات التى فرق الطاقـة بينهمـا يساوى

$$\Delta E = \frac{e\hbar B}{m_e} \quad (\text{٨-٥٤})$$

متوافقا مع النتائج التجريبية.

من المهم ملاحظـة أنـه للحصـول علـى توافـق عـددى مـع القياسـات التجريبية لم نقم باستبدال المؤثر $\hat{\ell}_z$ المتواجد فـى المعادلـة (٨-٧) بـالمؤثر $\hat{j}_z$ المعطـى بالمعادلـة (٨-٥٠). لايحتـوى الحـد المعـبر عـن المغزليـة بالمعادلـة(٨-٥٢) علـى المعـامل ½، وهـذا مـايعرف بالشـذوذ المغناطيسـى للمغزليـة[1]. نظـرا لأن الكميـة $e\hbar/(2m_e)$ (المسـماة مـاجنيتون بوهـر[2]) تضرب فى المجال B للحصول على التغير الملحوظ فى الطاقة، فهذا يعنـى أنها تشير إلى العزم المغناطيسى للإلكترون

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (\text{٨-٥٥})$$

٨-٤ الإحصاء ومبدأ الاستبعاد

عند دراسة ميكانيكيـة شـيئين متمـاثلين[3]، كلاسيكيا، ككرتـى بليـاردو، يفترض دائما أنه يمكن الإشارة لهذين الشيئين، على سبيل المثال، بالطريقـة التى يمكن بها التمييز بين الحالـة الفيزيائيـة التـى فيهـا "*الكـرة الأولـى هنـا والثانية هناك*" والحالة التى فيها "*الكرة الثانية هنا والأولى هناك*".

أما فى ميكانيكا الكم فيفترض أنه للجسيمات الكمية، كالإلكترونات، لايمكن إجراء هذا التمييز.

---

(1) magnetic anomaly of the spin (2) Bohr magneton (3) two identical objects

نظرا لعدم إمكانية التمييز بين الجسيمات فى عمليــة قيـاس الطاقـة فلابـد أن يكون الهاميلتونى متماثلا بالنسبة لعملية تبـادل[1] أى جسـيمين لموضعيهمـا. كذلك، بمعلومية دالة الحالة لاثنين من الإلكترونات يمكن معرفة احتمــال أن يكون،مثلا، إلكترون هنــا وآخـر هنـاك، إلا أننـا لانسـتطيع معرفـة لأى مـن هذين الإلكترونين هذا الاحتمال. بطريقة أخرى لايمكـن معرفـة أيهمـا كـان هنا والآخر هناك. لهذا فإن الكثافة الاحتمالية لاتتغير أيضا عند تبادل اثنين من الجسيمات لموضعيهما.

على فرض أن x_1 هى الإحداثيات العامة لأحـد الجسـيمين (يجـب أن تشـمل هذه الإحداثيات عملية اللف الذاتى)، x_2 هى الإحداثيات العامة للجسيم الآخر نرى أن، من المفاهيم السابقة، دالة الحالة تحقق العلاقة

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = |\Psi(x_2, x_1)|^2 \qquad (٨-٥٦)$$

ومنه

$$\Psi(x_1, x_2) = \pm\Psi(x_2, x_1) \qquad (٨-٥٧)$$

اختيــار الإشــارة الســالبة أو الموجبــة يتوقــف علـــى نـــوع الجســـيمات. للإلكترونات تكون الإشارة دائما سالبة. هذا يعنــى أن دالـة الحالـة الواصفـة لاثنين من الإلكترونات متماثلة ضديديا مع دالـة الحالـة الواصفـة لهمـا بعـد تبـادل موضعيهمـا. وعندئذ يقـال أن الإلكترونـات تحقـق إحصـاء فـيرمى-ديراك[2]. من الناحية الأخرى، دالة الحالـة الواصفـة لاثنيـن مـن الفوتونـات تكـون إشـارتها دائمـا موجبـة، أى أن الدالـة متماثلـة بالنسـبة لعمليــة تبــادل المواضع. ويقال حينئذ أن الفوتونات تحقق إحصاء بوز-أينشتين[3].

---

(1) exchange (2) Fermi-Dirac statistics (3) Bose-Einstein statistics

نتعرف على نوع تماثل الحالات التى تصف أكثر من اثنين من الجسيمات بطرق معقدة بعض الشيىء، وقد وجد أن هذه الحالات تكون إما متماثلة أو متماثلة ضديديا عند تبادل أى جسيمين لموضعيهما.

نفرض أن دالة الحالة لنظام من الإلكترونات يمكن تكوينها من حاصل ضرب دوال الحالة التى تصف كل إلكترون على حده. نظرا لتماثل الهاميلتونى فإن فئة دوال الحالة الممكنة

$$\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x), \ldots$$

يجب أن تتشابه لجميع الجسيمات. لاثنين فقط من الإلكترونات فإن دالة الحالة يجب أن تساوى

$$\Psi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left[\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2) - \psi_\beta(x_1)\psi_\alpha(x_2)\right] \qquad (٨-٥٨)$$

ولعدد n من الإلكترونات تظهر دالة الحالة على شكل محددة

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}\begin{vmatrix} \psi_\alpha(x_1) & \psi_\beta(x_1) & \ldots & \psi_\gamma(x_1) \\ \psi_\alpha(x_2) & \psi_\beta(x_2) & \ldots & \psi_\gamma(x_2) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \psi_\alpha(x_n) & \psi_\beta(x_n) & \ldots & \psi_\gamma(x_n) \end{vmatrix}$$

(٨-٥٩)

دالتا الحالة (٨-٥٨)، (٨-٥٩) لهما نفس التماثل الضديدى المطلوب. ذلك لأن تبادل أى زوج من الجسيمات لموضعيهما يكافىء تبادل صفين من المحددة، وهذا بدوره يؤدى إلى تغيير إشارتها.

من النتائج المهمة لما سبق ذكره عدم إمكانية تواجد إلكترونين بنفس الحالة، $(\Psi_\alpha \neq \Psi_\beta)$، وإن لم يكن هذا هو الحال تكون دالة الحالة Ψ مساوية

للصفر. هذا واضح فى المعادلة (٨-٥٨)، ومتحقق أيضا فى المحددة (٨-٥٩) نظرا لأن تساوى حالتان يعنى تساوى عمودان مما يجعل قيمة المحددة مساوية للصفر. تُعْرف القاعدة التى تنص على عدم وجود إلكترونين بنفس الحالة بمبدأ الاستبعاد لباولى.

للفوتونات أو لأى جسيمات أخرى تتبع إحصاء بوز-أينشتين (أى دوال حالاتها متماثلة) نحصل على نفس تراكب المعاملات تماما كما فى المعادلة (٨-٥٩)، إلا أن جميع الإشارات تكون موجبة. فى مثل هذه الأحوال يمكن لأى عدد من الجسيمات أن تتواجد بنفس الحالة.

كلاسيكيا، يمكن النظر إلى الحالات Ψ_α المختلفة على أنها هى المحددة للمسارت الممكنة للجسيمات. لهذا الحال نجد أن كل حد من التعبيرات السابقة يعبر عن وضع ممكن تمييزه كلاسيكيا. تعرف عملية حساب عدد الحالات المختلفة هذه لنظام معين باسم الإحصاء الكلاسيكى[1]، أو إحصاء بولتزمان[2].

الطرق المتعددة لحساب عدد الحالات التى يمكن تمييزها، فى الأنظمة عديدة الجسيمات، تتمخض عن نتائج لها أهمية كبيرة فى الميكانيكا الإحصائية. نستطيع توضيح ذلك باعتبار نظام بسيط مكون من جسيمين 2,1 فى الحالتين Ψ_β, Ψ_α.

الحالات التى يمكن تمييزها هى:

أ - *طبقا للإحصاء الكلاسيكى*

---

(1) classical statistics (2) Boltzman statistics

(أربع حالات)

$$\psi_\alpha(1)\psi_\alpha(2)$$
$$\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)$$
$$\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$$
$$\psi_\beta(1)\psi_\beta(2)$$

ب - *طبقا لإحصاء فيرمى*

(حالة واحدة) $$\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)-\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$$

ج - *طبقا لإحصاء بوز*

(ثلاث حالات)

$$\psi_\alpha(1)\psi_\alpha(2)$$
$$\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)+\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)$$
$$\psi_\beta(1)\psi_\beta(2)$$

عند درجات الحرارة العالية تتساوى احتمالات تواجد كل الحالات الممكنة لكل نوع من هذه الإحصاءات.

فى إحصاء فيرمى لايوجد أى إمكانية لتواجد الجسيمات فى نفس الحالة (مبدأ الاستبعاد). أما فى إحصاء بوز فإن احتمال تواجد جسيمان بنفس الحالة يساوى 2/3، وللإحصاء الكلاسيكى هذا الاحتمال يساوى 1/2. لهذا فإن إحصاء فيرمى يمنع الجسيمات من التواجد فى نفس الحالة، أى يجعلها متباعدة بعضها عن بعض. نظرا لأن إحصاء بوز يرفع احتمال تواجد الجسيمات بنفس الحالة بالمقارنة بالإحصاء الكلاسيكى فإنه إذاً يحافظ على الجسيمات مجتمعة (أى مقتربة بعضها من بعض).

٨-٥ التركيب الذرى[1]

---

(1) atomic structure

من أهم النتائج المترتبة على كل من مبدأ الاستبعاد، وشكل مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين، وفكرة المغزلية الإلكترونية، هو تفسير الجدول الدورى للعناصر[1] الذى يعتبر الأساس فى دراسة الكيمياء. نعتبر التركيب الذرى لذرة شحنة نواتها Z، أى تحتوى على عدد Z من الإلكترونات. تبعا لمبدأ الاستبعاد لايتواجد اثنين من الإلكترونات بنفس الحالة. إلا أنه فى الحالة $u_{n\ell m}$ يوجد اتجاهان للمغزلية، $|-\frac{1}{2}\rangle$ ، $|+\frac{1}{2}\rangle$، وعليه يمكن أن يتواجد اثنين من الإلكترونات فى الحالة المحددة بالأعداد الكمية n,ℓ,m.

نظرا لأن الإلكترونات فى حالاتها المثارة تبعث إشعاعا، فإنه بمرور الوقت تنتقل الإلكترونات إلى مستويات أقل فى الطاقة حتى تشغل كل الحالات المتاحة لهذه المستويات. تظهر فكرة الجدول الدورى نتيجة لأن العناصر التى تحتوى على عدد كاف من الإلكترونات لشغل كل الحالات المتاحة لمستوى الطاقة n، مثلا، تُكَوِّن غلافا مغلقا[2]، ويطلق على هذه العناصر كيميائيا أنها أنظمة خاملة (الغازات الخاملة). إتاحة اتحاد أى عنصر بآخر يتحدد منه الخواص الكيميائية لهذا العنصر، وهذا يرتبط مباشرة بعدد الإلكترونات التى تزيد أو تقل عن عدد الإلكترونات بالغلاف المغلق. لذلك فإن العناصر التى بها إلكترون واحد فقط خارج الغلاف المغلق تسمى بالعناصر القلوية[3] كالليثيوم والصوديوم. هذه العناصر نشطة جدا عند التفاعل وتتحد بسهولة مع الهالوجينات[4] ، على وجه الخصوص ، وتُكَوِّن

---

(1) periodic table of the elements (2) closed shell
(3) alkali metals (4) halogens

على سبيل المثال كلوريد الصوديوم. الهالوجينات هى العناصر التى يقل فيها عدد الإلكترونات بمقدار إلكترون واحد عن العدد المتاح بالغلاف المغلق.

الصورة المثالية التى عرضناها هنا تتعقد عندما نأخذ فى الاعتبار التنافر الكولومى بين الإلكترونات المختلفة. التفاصيل النظرية للتركيب الذرى والكيمياء الفيزيائية الكمية من المواضيع التى تتسم بمجالاتها المتسعة ولن نذكر عنها هنا أكثر من ذلك. غير أن هذه المواضيع لاتشتمل على أي مبادىء أساسية أكثر مما درسناه حتى الآن.

٨-٦ عرض للتطورات الإضافية

نشأت كل التطورات الإضافية التى ظهرت فى نظرية التركيب الذرى نتيجة للدراسات التفصيلية لمستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين. سنلقى هنا إشارة فقط على هذه التطورات.

فى الجزء الأول من الكتاب طورنا الأساليب لصياغة نظرية ميكانيكية كمية من النظرية الكلاسيكية المعروفة. أصبحت المتغيرات الكلاسيكية مؤثرات كمية تُعَين من علاقات المبادلة فيما بينها، وقد طبق هذا السلوك على الأنظمة الميكانيكية. نستطيع أيضا تطبيق هذا السلوك على نظرية ماكسويل للإشعاع المذكورة بالبند ١-١. النظرية الكمية للإشعاع تؤكد فرض بلانك الذى من خلاله ننظر إلى طاقة الإشعاع على أنها تجمع لجسيمات (فوتونات) كتلها مساوية للصفر، كما أن الطاقة ترتبط بالتردد عن طريق المعادلة (١-٩).

عند تفاعل الإشعاع مع الإلكترونات يتم انبعاث أو امتصاص فوتونات. احتمال الانبعاث، الذى يعد مقياسا لشدة التفاعل[1]، يتناسب مع ثابت التركيب الدقيق α،

$$\alpha \equiv \frac{e_M^2}{\hbar c} = 1/137 \qquad (٨-٦٠)$$

هذا الثابت عبارة عن كمية ليس لها أبعاد ويتكون كما نرى من الثوابت الفيزيائية الأساسية $e, \hbar, c$.

نظرا لأن نظرية ماكسويل تستوفى متطلبات النظرية النسبية الخاصة[2]، فإن نظرية الإشعاع المذكورة تعد نظرية كمية نسبية.

الخطوة المنطقية التى تلى ذلك هى عملية تعديل معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين لكى تتوافق مع النظرية النسبية الخاصة، وقد تم ذلك بواسطة ديراك[3] سنة ١٩٢٨. تبين لنا معادلة ديراك أن متطلبات النسبية التى ندخلها على النظرية الكمية لذرة الهيدروجين لها النتائج التالية:

أ – للإلكترون مغزلية ذاتية مساوية $1/2\,\hbar$.

ب – تعطى طاقة التفاعل مع مجال مغناطيسى خارجى بالهاميلتونى (٨-٥٢) (وهذا يفسر الشذوذ المغناطيسى للمغزلية).

ج – نتيجة للتركيب الدقيق تُدْخَل تصحيحات على معادلة بوهر التى تعطى مستويات الطاقة فى ذرة الهيدروجين. المستوى الذى كنا نرمز له بالرمز n ينقسم طبقا لهذا التصحيح إلى عدد n من المستويات المختلفة، التى يشار إليها بالمعادلة

---

(1) strength of the interaction (2) special theory of relativity (3) Dirac

$$E_{nj} = E_n\left[1+\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\right] \quad (٦١-٨)$$

حيث كمية الحركة الزاوية الكلية j يمكن أن تأخذ القيم

$$j+\frac{1}{2} = 0,1,2,\ldots,n \quad (٦٢-٨)$$

وكمية الحركة الزاوية المدارية تساوى

$$\ell = j \pm \frac{1}{2} \quad (٦٣-٨)$$

د - يوجد قرين موجب الشحنة للإلكترون، وهو المسمى بضديد الإلكترون[1] أو البوزيترون[2].

النتيجتان أ، ب معلومتان من قبل ولكن أُدخلتا على النظرية الغير نسبية ليتم التوافق مع النتائج التجريبية. معادلة ديراك توضح أن هاتين النتيجتين ضروريتان لأسباب جوهرية.

معادلة التركيب الدقيق (٨-٦١) تتفق مع التجارب المعملية. استنتج سمرفيلد[3] تلك المعادلة سنة ١٩١٨ مستخدما النظرية الكمية القديمة، وقد فُسرت الأعداد الكمية بهذه المعادلة وقتذاك تفسيرا خاطئا.

كانت النتيجة د مجرد اقتراح ثم تحقق بعد ذلك بالعديد من التجارب المعملية.

ينشأ التأثير الكهرومغناطيسى الوحيد فى معادلتى ديراك وشرودنجر لذرة الهيدروجين من طاقة التفاعل الكولومى بين البروتون والإلكترون. إلا أن حركه الإلكترون معجلة فى مداره، وبالتالى فهو مصدر للإشعاع الذى

---

(1) anti-electron (2) positron (3) Sommerfeld

يتفاعل بدوره مع الإلكترون نفسه. هذا يؤدى إلى انقسام إضافى لمستويات الطاقة المتحللة من قبل طبقا لمعادلة التركيب الدقيق (٨-٦١). كان لامب[1] أول من قام بقياس هذا النوع من الانقسام سنة ١٩٤٧، وهذا مايعرف بإزاحة لامب[2].

ظهر تأثير مشابه لما سبق عند تحرك إلكترون فى مجال مغناطيسى. مرة ثانية، يتفاعل الإشعاع الصادر من الإلكترون مع الإلكترون نفسه مما يحتم إدخال تصحيح للعزم المغناطيسى للإلكترون، كما ذكرنا بالمعادلة (٨-٥٥). حسبت هذه التصحيحات حتى الرتبة α^2 وقد ظهر أنها متفقة تماما مع النتائج التجريبية.

نقدم هنا التصحيحات المختلفة لمعادلة بوهر. حسبت هذه التصحيحات بدقة كبيرة جدا، وهى معطاة نسبة إلى طاقة ربط الحالة الأرضية بذرة الهيدروجين.

١- التصحيح المناظر لارتداد البروتون (انظر البند ٧-٥)

$$\frac{\Delta E_{recoil}}{|E_1|} \cong \frac{m_e}{m_p} \cong 10^{-3}$$

٢- التصحيح المناظر للتركيب الدقيق، المُعَرف بالمعادلة (٨-٦١)

$$\frac{\Delta E_{fs}}{|E_1|} \cong \alpha^2 \cong 10^{-4}$$

٣- التصحيح المناظر لإزاحة لامب

$$\frac{\Delta E_L}{|E_1|} \cong \alpha^3 \cong 10^{-6}$$

حيث طاقة ربط الحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين تساوى

---

(1) Lamb (2) Lamb shift

$$|E_1| = 13.605 \quad eV$$

وفى صورة التردد هذا المقدار يساوى واحد ريدبرج[1] (الريدبرج وحدة لقياس الطاقة)

$$R_\infty = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar} = 3.28985 \times 10^{15} \quad cycles/sec$$

$$= 3.28985 \times 10^{9} \quad Mc/sec$$

الانقسام، المناظر للتركيب الدقيق، بين المستويين $2P_{1/2}(n=2, \ell=1, j=1/2)$؛ $2P_{3/2}(n=2, \ell=1, j=3/2)$ يساوى (تتحلل المستويات تبعا للمعادلة (٨-٦١))

$$\Delta E_{fs}\left(2p_{1/2} - 2p_{3/2}\right) = 1.10 \times 10^{4} \quad Mc/sec$$

وإزاحة لامب بين المستويين $2P_{1/2}$؛ $2S_{1/2}$، التى تتحلل تبعا للمعادلة (٨-٦١)، تساوى

$$\Delta E_L\left(2s_{1/2} - 2p_{1/2}\right) = 1.057 \times 10^{3} \quad Mc/sec$$

نظرا لأن دقة هذا المقدار تبلغ حتى جزء واحد من الميجاسيكل، فإن القياسات المعملية والحسابات النظرية تتوافق حتى جزء من بليون من طاقة ربط الحالة الأرضية.

مسائل ٨

٨-١ وضح أن مصفوفات اللف لباولى، المعادلة (٨-٣٢)، تحقق العلاقات

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \iota\hat{\sigma}_z \ ,$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = \iota\hat{\sigma}_x \ ,$$

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = \iota\hat{\sigma}_y \ .$$

---

(1) Rydberg

٨-٢ المعاملان الزاوى والمغزلى فى دالة حالة إلكترون ما هما

$$\psi(\vartheta,\varphi)|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0 \left|+\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1 \left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

بين أن التوزيع الزاوى، بعد الجمع على كلا اتجاهى المغزلية، يكون موحد الخواص[1] فى جميع الاتجاهات (أى أن التوزيع الزاوى يكون متماثلا).

(1) isotropic

الجزء الثالث

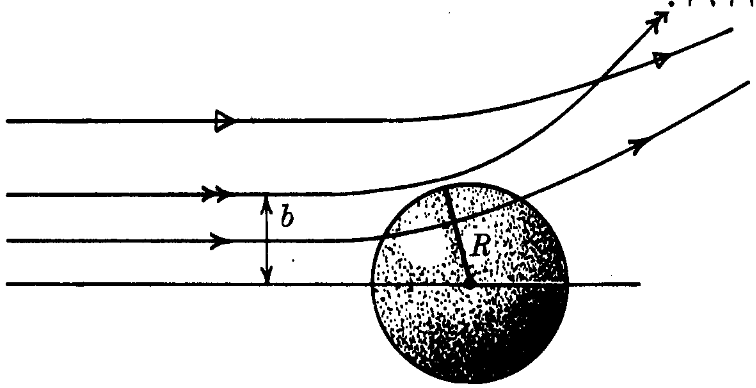
الفيزياء النووية

الباب التاسع

استطارة رذرفورد وتحلل-ألفا[1]

٩-١ استطارة رذرفورد

دعنا نوجه اهتمامنا الآن إلى أنوية[2] الذرات. من أول الأشياء التى نود معرفتها عنها هو حجمها، وقد تم ذلك من خلال التجربة الكلاسيكية لرذرفورد سنة ١٩١٢.



شكل ٩-١ توضيح الانحراف الناتج عن توزيع شحنة ممتدة نصف قطرها R، ولمسارات متعددة ومختلفة فى قيمة بارامتر الصدمة لها b. أكبر انحراف يحدث للمسار الذى يمس تقريبا حافة توزيع الشحنة،أى عندما يكون $b \cong R$.

تهدف التجربة إلى دراسة الانحرافات الناشئة فى مسارات جسيمات ألفا عند مرورها خلال رقيقة رفيعة من الذهب. يفترض فى هذه التجربة أن أكبر الانحرافات تنشأ بسبب التنافر الكولومى بين جسيمات ألفا (بشحنة $Z_\alpha = 2$) ونواة الذهب ($Z = 79$). نفرض أن نصف قطر نواة الذهب هو R.

---

(1) Rutherford scattering and α-decay (2) nuclei

شكل ٩-١ يوضح ثلاث مسارات لجسيمات ألفا. تميز هذه المسارات ببارامترات الصدمة[1] لها b.

لقيم R < b نجد أنه عند تناقص b يقترب جسيم ألفا من النواة وتزداد قوى التنافر الكولومى مما يؤدى إلى كبر الانحراف الحادث. أما إذا كان R > b فإن جسيمات ألفا تبدأ فى التخلل داخل مركز توزيع الشحنة. فى حالة مايكون الجسيم داخل النواة تكبر القوى المسببة للانحراف، ولكن فى نفس الوقت يكون جزء من شحنة النواة فىالجهة الأخرى لمسار الجسيم مما يجعل تأثيرها فى الاتجاه العكسى، وعليه يقل تأثير النواة فى إحداث الانحراف. يحدث أكبر انحراف عندما يكون الجسيم ملامسا بالضبط لسطح النواة ويكون نصف قطر توزيع الشحنة فى تلك الحالة مساويا تقريبا لبارامتر الصدمة المناظر لأكبر انحراف.

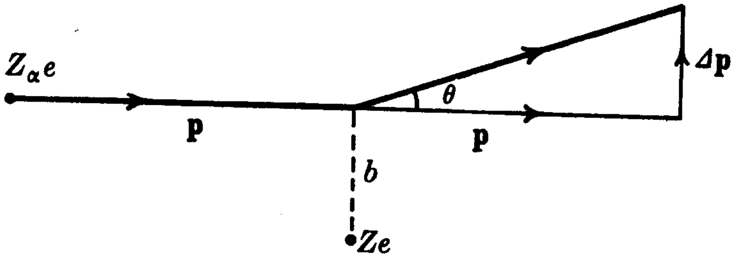
يمكن لنا التعبير عن هذا المفهوم بصورة تقديرية باستخدام أفكار كلاسيكية بحتة.

نعتبر مسارا لجسيم حدث له انحراف صغير. على امتداد الخط الأصلى للمسار تقل سرعة الجسيم وهو فى طريقه إلى النواة وتزداد عندما يبتعد عنها، وعليه فإن محصلة هذا التأثير متلاشية مما يجعلنا نهمل القوى الطولية[2]. يحدث الانحراف الأساسى أثناء مرور الجسيم بالنواة. فى هذه المنطقة نكتب قوى التنافر الكولومى فى شكلها التقريبى

$$F = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{b^2} \qquad (٩-١)$$

(1) impact parameters (2) longitudinal forces

هذه القوى تؤثر فى اتجاه عمودى على الاتجاه الأصلى وعلى امتداد المسافة b. إذا كانت سرعة الجسيم هى υ فإن زمن تأثير القوة يساوى $\Delta t = b/\upsilon$ أى ينشأ،طبقا لقانون نيوتن،كمية حركة مستعرضة[1] Δp ، حيث



شكل ٩-٢ رسم مسار جسيم ببارامتر صدمة b، وزاويةانحراف صغيرة ϑ.

$$\Delta p = F\,\Delta t$$

$$= \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{b^2}\cdot\frac{b}{\upsilon} \qquad (٩-٢)$$

والانحراف الحادث هو(انظر شكل ٩-٢)

$$\vartheta \cong \frac{\Delta p}{p} = \left(\frac{Z_\alpha Z e_M^2}{b\upsilon}\right)\Big/(m\upsilon) \qquad (٩-٣)$$

حيث m هى كتلة جسيم ألفا.

ومن هنا فإن العلاقة التقريبية بين الانحراف الحادث وبارامتر الصدمة هى

$$b = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{m\upsilon^2\vartheta} \qquad (٩-٤)$$

كان أكبر الانحرافات التى لاحظها رذرفورد فى حدود زاوية واحدة نصف قطرية. وكما بينا من قبل هذا الانحراف يناظر بارامتر صدمة مساوى لنصف قطر النواة $(\vartheta=1, b=R)$.

(1) transverse momentum

من المعادلة (٩-٤) نحصل على

$$R \cong \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{m \upsilon^2} \qquad (٩-٥)$$

قيمة m تساوى

$$m = 6 \times 10^{-27} \quad kg \qquad (٩-٦)$$

أما سرعة جسيمات ألفا فكانت أصغر قليلا من سرعة الضوء

$$\upsilon \cong 10^7 \quad m/sec \qquad (٩-٧)$$

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٩-٥) نجد

$$R \cong 10^{-14} \quad m \qquad (٩-٨)$$

وهى مسافة صغيرة جدا حتى لو قورنت بالمقياس الذرى[1] للمسافات، فهى تختلف عن نصف قطر بوهر الوارد فى المعادلة (١-٢٤) بمعامل قدره 10^4.

٩-٢ التفاعلات النووية

تُحمل شحنة النواة بواسطة البروتونات. كل بروتون يحمل شحنة مساوية لشحنة الإلكترون، ولكن بالطبع بإشارة مخالفة. كتلة البروتون تساوى

$$\begin{aligned} m_p &= 1.6 \times 10^{-27} \quad kg \\ &= 1839 \; m_e \\ &= 938 \; MeV/c^2 \end{aligned}$$

بوجه عام، كتلة النواة تساوى تقريبا ضعف مجموع كتل البروتونات

---

(1) atomic scale

اللازمة لتأسيس الشحنة الكلية للنـواة. تتولـد هـذه الزيـادة فـى الكتلـة بسـبب وجود النيوترونات. النيوترونات جسيمات متعادلـة كهربيـا، وكـل منهـا لـه كتلة مساوية تقريبـا لكتلـة البروتون (m_n=939 MeV/c^2). سـنقوم فيمـا بعـد باستخدام المصطلح *نيوكلون*[1] للإشارة إلى النيوترون أو البروتون.

فى محيط عِلْمَىْ الكيمياء والفيزياء الذرية يُنظـر إلـى النـواة علـى أنهـا مـن الأشـياء شـديدة الاسـتقرار، فهـى تبقـى بـدون تغيـير أثنــاء التفـاعلات الكيميائية القوية جدا. السؤال الذى يطرح نفسه الآن هو: ماهى القوى التـى تحافظ على مكونات النواة مجتمعة فى استقرار شديد؟

القـوى المعروفـة للفيزيـاء الكلاسيكية والذريـة هـى قـوى الجاذبيـة والقـوى المغناطيسية (وعلى وجه الخصوص قوى كولوم بين الجسيمات المشحونة). وحيث أن المسافات داخل النواة أصغر من المسافات الذريـة بالمعـامل 10^4 فـإن التنـافر الكولومـى بيـن البروتونـات داخـل النـواة يزيـد عــن التجـاذب الكولومى بين النواة والإلكترونات بالذرة بمقدار 10^8 من المرات. على ذلك فإن قوى كولوم تميل دائما إلى نسف مكونات النواة بعيدا. أما قوى الجاذبية بين الكتل فتميل دائما لجعل الجسيمات متقاربة، إلا أن هـذه القـوى صـغيرة جدا إذا قورنت بقوى التنـافر الكولومـى. النسـبة بيـن قـوى الجاذبيـة وقـوى التنافر الكولومى بين اثنين من البروتونات تساوى

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{\gamma m_p^2}{e_M^2} \qquad (١٠-٩)$$

حيث γ هو ثابت الجذب العام، ويساوى 6.6×10^{-11} mks. هذا يعنى أن هذه

(1) nucleon

النسبة تساوى 10^{-36}، أى أن قوى الجاذبية مهملة تماما داخل النواة– وهى أيضا كذلك داخل الذرة (خارج النواة)– وتحافظ على هذه الخاصية أيضا فى التفاعلات الكيميائية بين الذرات، كما فرضنا فى الجزء الثانى من الكتاب.

نستخلص من كل ماسبق أنه يوجد بداخل النواة، أى فى مدى حوالى 10^{-14} m، تفاعلات نووية معينة بين النيوكلونات، وأن هذه التفاعلات قوية بدرجة كافية للتغلب على قوى التنافر الكولومى بين البروتونات المختلفة المتقاربة جدا من بعضها. نظرا لأن هذه التفاعلات النووية لاتلعب أى دور فى التركيب الإلكترونى للذرات فهى إذاً تنشأ عن قوى قصيرة[1] المدى تؤثر فقط فى حدود مسافة مساوية 10^{-14} m.

من أول مشاكل الفيزياء النووية هو الوصول إلى الفهم التفصيلى لهذه القوى القصيرة المدى بنفس الطريقة التى نفكر بها لفهم التفاعلات الناتجة عن قوى الجاذبية بين الكتل وكذلك التفاعلات الناتجة عن قوى كولوم بين الجسيمات المشحونة.

٩–٣ تحلل–ألفا

من الأهمية بمكان، قبل الدخول فى مشاكل التفاعلات النووية، التأكد من أن ميكانيكا الكم التى أسسناها لدراسة الأنظمة الذرية تبقى أيضا صالحة، دون إجراء أى تعديل جوهرى، لوصف مايجرى داخل النواة.

الدليل القوى على حفاظ ميكانيكا الكم على صلاحيتها لوصف حالة النواة

---

(1) short range forces

يتجلى من خلال دراسة تحلل-ألفا. فـي هذه العمليـة تتحلـل النـواة الأم[1] A إلى جسيم ألفا والنواة الابنة[2] D.

$$A \rightarrow \alpha + D \tag{٩-١١}$$

جسيم ألفا هو نواة ذرة الهليوم، أى يتكون من اثنين من البروتونـات واثنيـن من النيوترونات.

فى دراسة تحلل-ألفا الناشيء عن نواة أم ثقيلة، كنواة الراديوم[3] مثلا، يمكـن النظر إلى جسيم ألفا على أنه جسيم مفرد، والنظـر إلـى النـواة الابنـة علـى أنها ساكنة فى مكانها (راجع المناقشة المعطاة فى نهاية البند ٧-٥).

تكلمنا فى البند السابق عن القوى النووية وبات من المؤكد أن الأنوية ليست من الأنظمة الكلاسيكية، وقد رأينا أن فكرة القوة تلعب دورا غير مباشر فى ميكانيكا الكم. على ذلك فسوف نستبدل القـوة بطاقـة وضـع التفـاعل[4] حتـى يصبح المعنى أقرب إلى الفهم.

عند مسافات كبيرة بالنسبة للمقدار 10^{-14} m يكون التفاعل الوحيد ناشئا عن طاقة الوضع الكولومية التى تسبب حدوث تنافر بين جسيم ألفا (بشحنة Z_α) والنواة الابنة (بشحنة Z). أما عند مسافات أقل من المقدار السابق يجب أن تسود طاقة الوضع النووية الشديدة الجاذبية[5]. محصلة هذا التـأثير لابـد أن تبدو مشابهة بعض الشيىء للشـكل العـام لطاقـة وضـع التفـاعل الموضحـة بشكل ٩-٣.

من الملائم تعريف طاقة الوضع كما يلى:

$$V_R = \frac{Z_\alpha Z e_M^2}{R} \tag{٩-١٢}$$

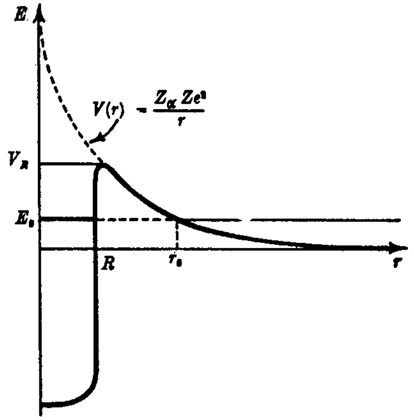
---

(1) parent nucleus (2) daughter nucleus (3) radium (4) interaction potential (5) strongly attractive nuclear potential

التى تعد، من شكل ٩-٣، تقديرا مناسبا لأقصى ارتفاع لطاقة الوضع بين جسيم ألفا والنواة الابنة.

سبق أن قدمنا من قبل فى الباب الرابع التفسير الوصفى لتحلل-ألفا. من الوجهة الكلاسيكية إذا كان هناك جسيم طاقته E_O بداخل بئر جهد V_R يتبع العلاقة

$$V_R > E_0 > 0 \qquad (٩-١٣)$$



شكل ٩-٣ منحنى الطاقة لطاقة الوضع المتبادلة بين جسيم ألفا والنواة الابنة . عند مسافات كبيرة $(10^{-14}\ m \ll r)$ تكون ببساطة طاقة الوضع عبارة عن تنافر كولومى . عند مسافات صغيرة تسود طاقة الوضع النووية الجاذبة.

فإن الجسيم يكون مقيدا ولايوجد أى إمكانية لهروبه. إلا أن مالوحظ عمليا بالفعل هو أنه لأى نواة نشطة إشعاعيا[1] يوجد احتمال ثابت لوحدة الزمن، $1/\tau$، لإمكانية تفتتها (تحللها).

(1) radioactive nucleus

لهذا إذا كان N(t) هو عدد الأنوية عند الزمن t، فإن

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} \qquad (١٤-٩)$$

وعليه يكون

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau} \qquad (١٥-٩)$$

حيث الثابت τ يسمى متوسط العمر[1] للنواة.

أما بالنسبة لميكانيكا الكم فإن إمكانية النفاذ من حاجز الجهد تمكن جسيم ألفا من الهروب، وبالتالى فإن ميكانيكا الكم تمدنا بميكانيكية تحلل هذا النظام.

نوجه اهتمامنا الآن إلى تقييم هذا التصور مراعين جانب الدقة. تم من قبل حساب المسافة النووية القياسية[2] R، وعليه فإن الزمن النووى القياسى[3] (محسوبا على أساس أبعاد الثوابت النووية) يساوى

$$\tau_n = \frac{m_p R^2}{\hbar} \cong 10^{-21} \text{ sec} \qquad (١٦-٩)$$

ونظرا لأن متوسط الأعمار للأنوية ينحصر فى المدى من 10^{-17} sec حتى 10^{10} من السنين، فإن عملية تحلل-ألفا تتم ببطء شديد جدا بالمقارنة بالمقياس الزمنى النووى.

كتقريب جيد من المرتبة الأولى نستطيع اعتبار النواة الابنة وجسيم ألفا على أنهما يكونان نظاما مستقرا. نفرض للتبسيط أن كمية الحركة الزاوية الداخلة فى الحساب تساوى صفر. عندئذ نحصل على الطاقة E_0 من حل معادلة القدر المناسب للنظام المقيد الذى فيه طاقة الوضع $V^1(r)$ مشابهة للمبينة بشكل ٩-٣ عندما يكون $r < R$، ونفرض أيضا أن طاقة الوضع ثابتة فى المدى $r \geq R$، أى أن

---

(1) mean life (2) typical nuclear length (3) typical nuclear time

$$V^1(r) = V_R \quad , \quad r \geq R \qquad (٩-١٧)$$

هذه الفروض تستلزم إيجاد قيمـة E_O مـن حـل معادلـة القدر المناسـب (٧-١٠) عندما يكون $\ell = 0$ (أى عندمـا يكـون كميـة الحركـة الزاويـة مسـاوية صفرا)،

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V^1(r) - E_0\right]\chi(r) = 0 \qquad (٩-١٨)$$

حيث μ هى الكتلة المختصرة لجسيم ألفا والنواة الابنة.

إلا أن شكل قانون طاقـة الوضـع $V^1(r)$ غير معـروف تفصيـلا، وللغـرض الحالى نكتفى بأخذ قيمة E_O من التجربة المعملية مباشرة.

حيث أن طاقة النظام تساوى صفرا، فى حالة ماتكون النواة الابنـة D بعيـدة بعدا لانهائيا عن جسيم ألفا، فإن الطاقة E_O تكون ببساطة عبارة عن الفـرق فى الطاقة بين طاقة السكون للنواة الأم A وطـاقة النـواة الابنـة وجسـيم ألفـا معا، أى أن

$$E_0 = m_A c^2 - (m_D + m_\alpha)c^2 \qquad (٩-١٩)$$

عند اعتبارنا لمشكلة حقيقية يجب علينا حل المعادلة

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) - E_0\right]\chi(r) = 0 \qquad (٩-٢٠)$$

وذلك للحصول على دالة الحالة $\chi(r)$ المرتبطة بطاقة الوضـع الفعلية $V(r)$.

نضع التعريف

$$K^2(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r) - E_0\right) \qquad (٩-٢١)$$

حينئذ تؤول معادلة القدر المناسب (٩-٢٠) إلى

$$\frac{\partial^2\chi(r)}{\partial r^2} - K^2(r)\chi(r) = 0 \qquad (٩-٢٢)$$

مربع هذه الكمية هو الاحتمال النسبى لتواجد الجسيم عند $r=r_0$، $r=R$. وهذا هو معامل النفاذ T الذى يفسر من الناحية الشبه كلاسيكية على أنه احتمال تخلل الجسيم لحاجز الجهد عندما يصطدم به (انظر المعادلة (٤-٣٥)).

لهذا فإن

$$T=\exp\left[-2\int_R^{r_0}\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r)-E_0\right)\right)^{1/2}dr\right] \qquad (٩-٢٨)$$

نحصل على الاحتمال لوحدة الزمن لهروب الجسيم من حاجز الجهد من حاصل ضرب T فى التردد الذى يتذبذب به الجسيم داخل بئر الجهد. هذا التردد يساوى مقلوب الزمن النووى القياسى τ_n. أى أن

$$\frac{1}{\tau}=\frac{T}{\tau_n} \qquad (٩-٢٩)$$

من الممكن وبدون أى صعوبة تقييم التكامل (٩-٢٨)، ولكن لفهم السمات العامة للنظام نعتبر الآن أن الكمية التى بداخل علامة التكامل ثابتة عند القيمة المتوسطة لها. على ذلك يكون

$$T=\exp\left[-2\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{1/2}\left(\frac{V_R-E_0}{2}\right)^{1/2}(r_0-R)\right] \qquad (٩-٣٠)$$

وهذا هو بالضبط التعبير (٤-٣٥).

يجب التعويض عن r_0 , R من المعادلتين (٩-٢٦)، (٩-١٢). وحيث أن كتل الأنوية التى تتحلل باعثة جسيمات ألفا دائما ماتكون أكبر من 200 (مقاسة بوحدات كتلة البروتون)، فإن الكتلة المختصرة تساوى تقريبا كتلة جسيم ألفا نفسه. ولهذا

$$\mu\cong m_\alpha\cong 4m_p \qquad (٩-٣١)$$

عند استخدام المعادلة (٩-٢٦) لحذف r_0 فإن المعادلة (٩-٣٠) تؤول إلى

$$T = \exp\left[\frac{-4(V_R - E_0)^{3/2}}{E_0\hbar/(m_p^{1/2}R)}\right] \qquad (٩-٣٢)$$

الكمية $\hbar/(m_p^{1/2}R)$ لها وحدات الجذر التربيعى للطاقة وهى تساوى عدديا الواحد الصحيح تقريبا (ذلك إن عبرنا عن هذه الكمية بوحدات $(\text{MeV})^{1/2}$ ومساواة R بالمقدار 10^{-14} m).

من ذلك فإن متوسط العمر يكتب، بدلالة الطاقة E_0 المتاحة فى التفاعل، كالآتى:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_n}\exp\left[-4\frac{(V_R - E_0)^{3/2}}{E_0}\right]$$
$$= 10^{21}\exp\left[-4\frac{(25 - E_0)^{3/2}}{E_0}\right] \ \text{sec}^{-1} \qquad (٩-٣٣)$$

حيث عبرنا هنا عن E_0 , V_R بوحدات المليون إلكترون فولت (MeV)، وتم حساب قيمة V_R عندما كان Z = 80.

أهم مافى هذه المعادلة هو اعتمادها الشديد على E_0 الذى يعزو إليه التباين الهائل فى أزمنة متوسطات الأعمار الملاحظة على الأنوية المتساوية تقريبا فى أنصاف أقطارها ومختلفة فى كتلها. لذلك إذا كان

$$E_0 = 4\ \text{MeV} \Rightarrow \tau \cong 3\times10^{12}\ \text{years}$$
$$E_0 = 8\ \text{MeV} \Rightarrow \tau \cong 10^{-6}\ \text{sec} \qquad (٩-٣٤)$$

بينما من الناحية التجريبية نجد أن

$$E_0 = 4.3\text{MeV} \Rightarrow \tau = 2\times10^{10}\ \text{years} \quad (\text{للثوريوم})$$

(٩-٣٥)

$$E_0 = 7.83\ \text{MeV} \Rightarrow \tau = 10^{-3}\ \text{sec} \quad (\text{للراديوم } C')$$

عند هذا الحد نلاحظ أن النظرية التقريبية التى وضعناها لإيجاد القيم المستنتجة نظريا، المعادلة (٩-٣٤)، فى توافق معقول مع القيم الملاحظة تجريبيا، المعادلة (٩-٣٥). الاختلاف البسيط الحادث نتج عن وضعنا لبعض الفروض عند تقييم المعادلة (٩-٢٨).

إذا قمنا بإعادة تقييم المعادلة (٩-٢٨) مراعين جانب الدقة (باستخدام متوسطات الأعمار τ والطاقات المتحررة E_0) يمكن معرفة أنصاف أقطار الأنوية المشعة التى تبعث جسيمات ألفا. هذه الحسابات الدقيقة بينت لنا أن النيوكلونات تكون مرتبطة (محزمة) بشدة داخل النواة، كما أن كل نيوكلون يشغل حجما كرويا نصف قطره 1.5×10^{-15} m. هذا يعنى أن نصف قطر النواة التى بها عدد A من النيوكلونات يساوى

$$R = 1.5\times10^{-15} A^{1/3} \quad m \qquad (٩-٣٦)$$

تلك النتيجة فى توافق تام مع استنتاجات تجربة رذرفورد (البند ٩-١) المبنية على أساس اعتبارات مختلفة تماما.

٩-٤ ملخص

فى هذا الباب برهنا على أن أنصاف أقطار أنوية الذرات فى حدود المقدار 10^{-12} cm. وأن النواة تتكون من نيوترونات وبروتونات (النيوكلونات) متماسكة مع بعضها البعض بواسطة طاقة وضع نووية معينة. طاقة الوضع هذه فعالة للغاية فى المدى القريب القيمة من نصف قطر النواة، حيث تكون كبيرة بدرجة كافية لتغطية قوى التنافر الكولومى الكبيرة بين البروتونات المتقاربة جدا من بعضها داخل النواة. اتضح لنا، من دراسة ظاهرة تحلل-ألفا، أن حركة النيوكلونات تحت تأثير طاقة

الوضـع النوويـة تكـون محكومـة بقوانيـن ميكانيكـا الكـم التـى قُدمـت أصــلا للتعامل مع ميكانيكا الذرات. مع العلم أن هذه الظاهرة النووية الهامـة غير واضحة تماما إذا عولجت على أسـاس المفـاهيم الميكانيكيـة الكلاسـيكية (أو النظرية الكمية القديمة). إلا أن ماهية طاقـة الوضـع النوويـة غير معلومـة تماما وتعد عملية فحص هذه الطاقـات أنهـا المشـكلة الكـبرى فـى الفيزيـاء النووية.

مسائل ٩

٩-١ عيـن التكـامل الموجـود بالمعادلـة (٩-٢٨)، ومنـه وضـح أن التعبـير الأدق للكمية T هو

$$T = \exp\left[\frac{-2\sqrt{(2\mu E_0)}}{\hbar} r_0 \left\{\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/2}\right\}\right]$$

[استخدم التعويض

$$\frac{E_0 r}{Z_\alpha Z e_M^2} \equiv \frac{r}{r_0} = \cos^2 x$$

وعندئذ يسهل تقييم التكامل ليعطى

$$T = \exp\left[\frac{-2\sqrt{(2\mu E_0)}}{\hbar} r_0 \left\{\cos^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/2} - \left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{R}{r_0}\right)^{1/2}\right\}\right]$$

وهذا التكامل يمكن فكه فى صورة قوى R/r_0]

٩-٢ اسـتخدم هـذا التعبـير لاسـتنتاج قيمـة أدق لفـترة عمــر الراديــوم C، ($A=210, Z=82$, $E_O = 7.8$ MeV).

الباب العاشر

نظرية الاستطارة[1]

١٠-١ مقدمة

الوسيلة الوحيدة لفحص طاقات الوضع النووية هى تقريب النيوكلونات من بعضها البعض ثم دراسة ماينشأ بينها من تفاعلات، كما هو الحال عند دراسة القوى المغناطيسية بتقريب المغناطيسات بعضها من بعض ودراسة كيفية تأثير كل منها على الآخر.

لإجراء ذلك يلزمنا حزمة ساقطة من الجسيمات النووية وأنوية أو نيوكلونات كهدف وجهاز كاشف[2] يمكننا من معرفة كيفية الانحراف (الاستطارة)، الناتج عن التفاعل النووى، بين جسيمات الحزمة الساقطة وجسيمات الهدف. من الدراسة التفصيلية لكل من التوزيع الزاوى وشدة الجسيمات المستطارة يمكن استنتاج شكل طاقة وضع التفاعل.

نظرا لأن الهدف يتسبب فى إحداث استطارة للحزمة الساقطة فإن التجارب التى تقع فى هذا الإطار يطلق عليها اسم تجارب الاستطارة ويستخدم فى تحليل نتائجها مايسمى بنظرية الاستطارة. وحيث أننا سنتعامل هنا مع أنظمة كمية فالحاجة تحتم علينا الاتجاه إلى نظرية الاستطارة الكمية[3]. ولكن لتوضيح الرؤية يفضل البدء أولا بالتجارب التى تتم تحت ظروف كلاسيكية بحتة.

---

(1) scattering theory (2) detection device (3) quantum scattering theory

١٠-٢ نظرية الاستطارة الكلاسيكية[1]

نعتبر حزمة من الجسيمات المنتظمة الكثافة، كل جسيم يسير بسرعة ثابتة υ. نعرف الفيض[2] F لهذه الحزمة بأنه عدد الجسيمات التى تسقط على وحدة المساحات (المساحة عمودية على اتجاه الحزمة) فى وحدة الزمن. هذا العدد يساوى عدد الجسيمات الواقعة فى حجم محدد بمقطع مستعرض[3] مساحته الوحدة وارتفاع مقداره υ. إذا كانت كثافة الجسيمات هى ρ فإن الفيض يساوى

$$F = \rho\upsilon \qquad (١٠-١)$$

وأبعاده هى

$$[F] = L^{-2}T^{-1} \qquad (١٠-٢)$$

نفرض أن صفر الإحداثيات يقع عند موضع الهدف، وأن الحزمة موجهة على امتداد المحور-z، شكل ١٠-١. نتعرف على شدة واتجاه الاستطارة من حساب المقطع المستعرض التفاضلى[4] $\sigma(\vartheta,\varphi)$ ، حيث

$\sigma(\vartheta,\varphi)d\Omega$ = عدد الجسيمات التى تستطار داخل الزاوية المجسمة

(١٠-٣) $d\Omega(\vartheta,\varphi)$ فى وحدة الزمن لوحدة الفيض

أما أبعاد $\sigma(\vartheta,\varphi)$ فتساوى

$$[\sigma(\vartheta,\varphi)] = T^{-1}\left(L^{-2}T^{-1}\right)^{-1} = L^2 \qquad (١٠-٤)$$

أى أن المقطع المستعرض التفاضلى يعبر عن مساحة.

نحصل على المقطع المستعرض الكلى[5] للاستطارة σ بتكامل المقطع المستعرض التفاضلى على كل الزوايا المجسمة

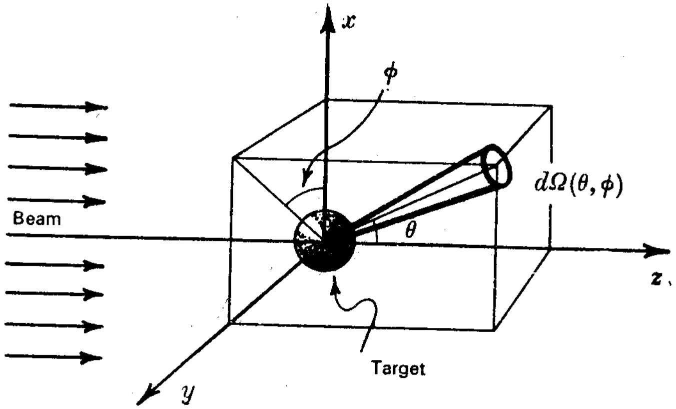
---

(1) classical scattering theory (2) flux (3) cross section
(4) differential cross section (5) total cross section

$$\sigma = \int \sigma(\vartheta,\varphi) d\Omega \qquad (١٠-٥)$$

وهو أيضا يعبر عن مساحة.

يتضح لنا من التعاريف سالفة الذكر أن المقطع المستعرض الكلى هو العدد الكلى للجسيمات المنحرفة فى جميع الاتجاهات فى وحدة الزمن لوحدة الفيض. إلا أن الجسيمات المنحرفة هى بالضبط تلك الجسيمات التى تصطدم بالهدف، أما وحدة الفيض فتساوى جسيم واحد لكل وحدة مساحة فى وحدة الزمن. ومن هنا فإن المقطع المستعرض الكلى يمثل مساحة المقطع المستعرض التى يعرضها الهدف أمام اتجاه الحزمة، وهكذا جاءت التسمية.



شكل ١٠-١ الإحداثيات القطبية التى عادة ماتستخدم فى وصف عملية الاستطارة . يعتبر عادة موضع الهدف على أنه صفر الإحداثيات ، وأن اتجاه الحزمة على امتداد المحور-z.

بنفس الطريقة نقول أن المقطع المستعرض التفاضلى $\sigma(\vartheta,\varphi)d\Omega$ هو تلك المساحة الفعالة[1] من الهدف التى تتسبب فى انحراف الجسيمات

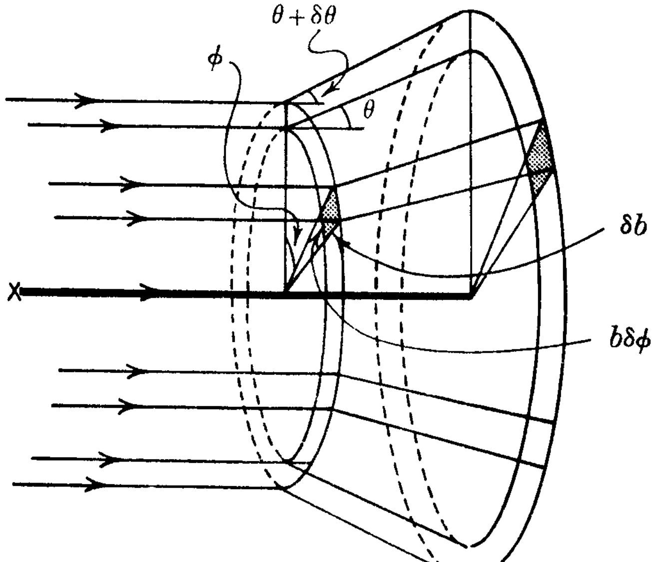
(1) effective area

الساقطة داخل الزاوية المجسمة $d\Omega(\vartheta,\varphi)$.

أنصاف الأقطار النووية تتقارب من المقدار 10^{-12} cm، ومنه فإن مساحة الهدف النووى تتقارب من مربع هذه الكمية مما يدفعنا لقياس المقاطع المستعرضة النووية[1] بوحدة تسمى البارن[2]، حيث

$$1\ \text{barn} = 10^{-24}\ \text{cm}^2$$

نعتبر نظاما تماثله سمتيا[3] (أى متماثل حول المحور-z) حتى نضمن عدم اعتماد الانحرافات الحادثة على الزاوية φ. تعانى مسارات الجسيمات التى بارامترات الصدمة لها محصورة فى المدى بين $b(\vartheta), b(\vartheta)+\delta b$ انحرافات بزوايا تتغير فى المدى من ϑ إلى $\vartheta+\delta\vartheta$. لهذا تكون المساحة الفعالة التى تسبب حدوث انحراف داخل الزاوية المجسمة $d\Omega(\vartheta,\varphi)$ مساوية، انظر شكل ١٠-٢.



شكل ١٠-٢ المساحة الفعالة $b(\vartheta)dbd\varphi$ للاستطارة داخل الزاوية المجسمة $d\Omega(\vartheta,\varphi)$.

---

(1) nuclear cross sections (2) barn (3) azimuthal symmetry

$$d\sigma(\vartheta,\vartheta) = \sigma(\vartheta,\varphi)d\,\Omega(\vartheta,\varphi) = b(\vartheta)\,db\,d\varphi \qquad (١٠-٦)$$

والزاوية المجسمة تساوى

$$d\,\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \qquad (١٠-٧)$$

بتدارك عدم اعتماد σ على φ وإجراء التكامل على طرفى المعادلة (١٠-٦) بالنسبة إلى φ التى تتغير من صفر إلى 2π، نجد أن

$$2\pi\,\sigma(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi b(\vartheta)\,db \qquad (١٠-٨)$$

وعندئذ يكون

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\vartheta) = \frac{b(\vartheta)}{\sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| \qquad (١٠-٩)$$

من الملاحظ أنه بزيادة بارامتر الصدمة b تقل الزاوية ϑ، وتصبح الكمية db/dϑ دائما سالبة. لتكون قيمة المقطع المستعرض موجبة دائما أخذنا القيمة المطلقة للكمية db/dϑ.

(أ) *الاستطارة الكلاسيكية الناشئة عن كرة صلبة*[1]

نعتبر اصطدام حزمة من الجسيمات، تصادما مرنا، بكرة صلبة نصف قطرها a. من شكل ١٠-٣ نجد أن

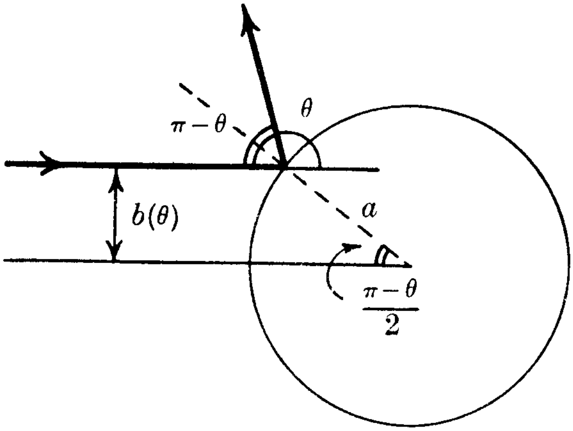
$$b(\vartheta) = a\sin\frac{\pi-\vartheta}{2} = a\cos(\vartheta/2) \qquad (١٠-١٠)$$

ومنه

$$\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \left(\frac{a}{2}\right)\sin(\vartheta/2) \qquad (١٠-١١)$$

(1) hard sphere

بالتعويض من المعادلة (١٠-١١) فى المعادلة (١٠-٩) نجد أن المقطع المستعرض التفاضلى يساوى



شكل ١٠-٣ الاستطارة بواسطة كرة صلبة نصف قطرها a.
الشكل يوضح العلاقة بين $b(\vartheta)$ وزاوية الاستطارة ϑ.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\sigma(\vartheta)=\frac{a^2}{4} \qquad (١٠-١٢)$$

وعليه المقطع المستعرض الكلى يأخذ القيمة

$$\sigma=\int\frac{a^2}{4}d\Omega=\pi a^2 \qquad (١٠-١٣)$$

تعد هذه النتيجة مثالا مبسطا على المعنى العام الذى أطلقناه على المقطع المستعرض الكلى للاستطارة، حيث هنا πa^2 هى بالضبط المساحة الكلية للكرة الصلبة المواجهة لاتجاه الحزمة. ومن ثم فإن المقطع المستعرض الكلى (أى العدد الكلى للجسيمات المستطارة) يحدد الحيز الفعال من الهدف.

من كل ماسبق يظهر جليا إمكانية استخلاص معلوماتنا عن شكل الهدف من معرفة المقطع المستعرض التفاضلى. ففى حالة الكرة الصلبة نجد أن المقطع المستعرض التفاضلى (أى التوزيع الزاوى للمقطع

المستعرض) يأخذ نفس المقدار فى جميع الاتجاهات وعند أى قيمة من قيم طاقات الحزمة، كما نرى بالمعادلة (١٠-١٢)، مما يؤكد المعنى السابق.

(ب) الاستطارة الكولومية[1]

يتعين علينا الحصول على توزيع زاوى للاستطارة مختلفا تماما عن الحالة السابقة (حالة الكرة الصلبة) عندما تكون الحزمة مكونة من عدد من الجسيمات التى شحنة كل منها Z_1، وكان الانحراف يحدث نتيجة للتنافر الكولومى بين جسيمات الحزمة والشحنة Z_2 الموجودة على هدف ثابت (كما فى تجربة رذرفورد).

على ضوء التقريبات المستخدمة فى الباب التاسع نكتب العلاقة بين بارامتر الصدمة والانحراف، المعادلة (٩-٤) كما يلى:

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e_M^2 m}{p^2 \vartheta} \qquad (١٠-١٤)$$

حيث p هى كمية حركة جسيمات الحزمة.

بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة إلى ϑ نحصل على

$$\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{Z_1 Z_2 e_M^2 m}{p^2 \vartheta^2} \qquad (١٠-١٥)$$

عندما تكون ϑ صغيرة ($\sin\vartheta \approx \vartheta$)، وباستخدام المعادلة (١٠-٩) نجد

$$\sigma(\vartheta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e_M^2 m}{p^2}\right)^2 \frac{1}{\vartheta^4} \qquad (١٠-١٦)$$

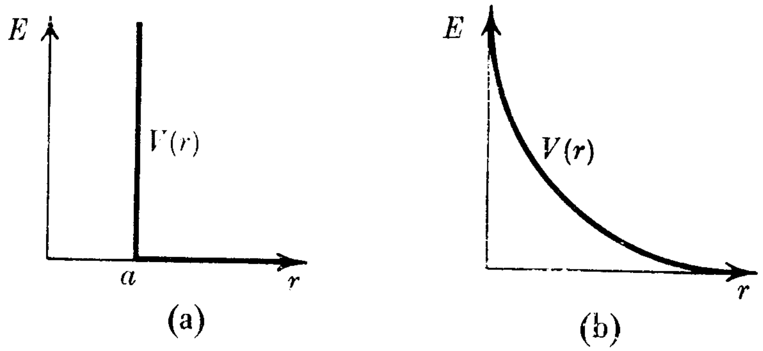
هذا يعنى أن شكل الجسيمات المستطارة يرسم قمة أمامية حادة جدا على النقيض من التوزيع الزاوى المتماثل لاستطارة الكرة الصلبة.

---

(1) Coulomb scattering

عند زيـادة كميـة الحركـة p يجـب أن تتنـاقص قيمـة الزاويـة ϑ حتـى يبقـى مقدار $\sigma(\vartheta)$ ثابتا. لهذا فإن القمة الأمامية تبدو أكثر وضوحا مع زيادة كمية الحركة، أو بمعنى آخر مع زيادة طاقة جسيمات الحزمة.

لمعالجة حالتى الاستطارة السابقتين باستخدام النظرية الكمية نعبر عن التفاعل بين جسيمات الحزمـة والهدف بدلالـة طاقـة وضـع التفـاعل، شـكل ١٠-٤.



شكل ١٠-٤ طاقات وضع التفاعل (أ) الكرة الصلبة (ب) تنافر كولومى.

فى حالة الكرة الصلبة نجد

$$V(r) = 0 \quad , \quad r > a$$
$$V(r) = \infty \quad , \quad r = a \qquad (١٠-١٧)$$

أما فى حالة الاستطارة الكولومية فنعلم أن

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e_M^2}{r} \qquad (١٠-١٨)$$

المعادلة (١٠-١٧) تعنى أن طاقة الوضع تزداد زيـادة فجائيـة كبيرة جدا مما يؤدى إلى الظهور المفاجىء لقوى كبيرة للغاية عند اقتراب الجسيمات

من بعضها البعض إلى مسافة معينة. طاقات الوضع هذه تؤدى عادة إلى توزيع متماثل للاستطارة.

على النقيض من ذلك فإن التفاعل الكولومى ينشأ من طاقة وضع صغيرة جدا. طاقة الوضع هذه تناظر قوة تتغير ببطء مع المسافة بين الجسيمات المشحونة المتفاعلة. هذا التأثير الضعيف للقوة يمتد إلى مسافات كبيرة بين الجسيمات. مثل هذه القوة (الطاقة بالتناظر) تتسبب فى حدوث استطارة للجسيمات خلال زوايا صغيرة، وتميل زاوية المخروط الأمامى[1] الحاوى على معظم الجسيمات المستطارة إلى الصغر مع زيادة طاقة جسيمات الحزمة.

بدراسة كيفية اعتماد المقطع المستعرض للاستطارة على كل من الطاقة وزاوية استطارة الجسيمات النووية نستطيع استنتاج شكل طاقة الوضع المؤثرة على الجسيمات المتفاعلة. وتلك هى الأداة الأساسية للفيزياء النووية.

١٠-٣ نظرية الاستطارة الكمية

يظهر تأثير التفاعلات النووية على مسافات فى حدود المقدار 10^{-12} cm. كما نجد أن حزم الجسيمات تسير بسرعات فى حدود 10^{9} cm/sec ، أى سرعات قريبة من سرعة الضوء. لذلك فإن زمن العبور (عبور منطقة التفاعل) فى التفاعلات النووية يكون فى حدود 10^{-21} sec . وحيث أن قيمة $\hbar$ حوالى 10^{-27} cgs فإن طاقة الحزمة يجب أن تكون أكبر بكثير من 10^{-5} erg (أو بوحدات أخرى أكبر بكثير من 10 MeV) حتى يكون للمفاهيم

---

(1) forward cone

الكلاسيكية، مثل بارامتر الصدمة للحزمة، شيىء من الشرعية. من الواجب علينا الآن استخدام ميكانيكا الكم لتحليل تجارب الاستطارة النووية. يظهر الحد الكمى تماما فى تجارب الاستطارة عند الطاقات المنخفضة.

نعتبر استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة هدف مثبت عند صفر الإحداثيات. إذا كانت طاقة وضع التفاعل بين الجسيمات هى $V(r)$، وطاقة الحزمة هى

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad (١٠-١٩)$$

فإن دالة الحالة لابد أن تكون دالة مناسبة مناظرة لمعادلة شرودنجر عند تلك الطاقة.

عندما يكون لطاقة الوضع مدى محدود فإن الحل يظهر فى الشكل الذى يؤول عند مسافات كبيرة إلى حزمة مستوية فى اتجاه المحور-z ، بالإضافة إلى موجة مستطارة مكونة من موجات كروية خارجة[1] فقط.

للاختصار نضع

$$k = \frac{p}{\hbar} \qquad (١٠-٢٠)$$

حينئذ يصبح الحل التقريبى عند مسافات كبيرة فى الصورة

$$u_k(r) \approx e^{ikz} + f(\vartheta,\varphi)\frac{e^{irk}}{r} \qquad (١٠-٢١)$$

= (موجة مستوية) + (موجة مستطارة)

الكثافة الجسيمية فى الموجة المستوية تساوى

$$\rho = \left|e^{ikz}\right|^2 = 1 \qquad (١٠-٢٢)$$

وسرعة الجسيمات هى

---

(1) outgoing spherical waves

$$\upsilon = \frac{\hbar k}{m} \quad (٢٣-١٠)$$

لذلك فإن الفيض، كما عرفناه بالمعادلة (١٠-١)، يساوى

$$F = \rho\upsilon = \upsilon \quad (٢٤-١٠)$$

عدد الجسيمات المستطارة فى الحجم المحصور بين المسافتين r، r+dr وداخل الزاوية المجسمة $d\Omega(\vartheta,\varphi)$ هو

$$\left|\frac{f(\vartheta,\varphi)e^{ikr}}{r}\right|^2 r^2 d\Omega dr = |f(\vartheta,\varphi)|^2 d\Omega dr \quad (٢٥-١٠)$$

والعدد المستطار داخل الزاوية $d\Omega$ فى وحدة الزمن يساوى

$$|f(\vartheta,\varphi)|^2 d\Omega\, \upsilon$$

لذلك فإن مساحة المقطع التفاضلى (عدد الجسيمات المستطارة داخل الزاوية $d\Omega$ فى وحدة الزمن لوحدة الفيض) تساوى

$$d\sigma = \sigma(\vartheta,\varphi)d\Omega = |f(\vartheta,\varphi)|^2 d\Omega \quad (٢٦-١٠)$$

ومساحة المقطع الكلى هى

$$\sigma = \int |f(\vartheta,\varphi)|^2 d\Omega$$

فى التجربة نقيس $|f(\vartheta,\varphi)|^2$ ، التى لها علاقة بالكمية $V(r)$، وذلك لأن المعادلة (١٠-٢١) هى الشكل التقريبى لحل معادلة شرودنجر التى فيها $V(r)$ تمثل طاقة الوضع. فى كل الحالات التى لها أهمية فيزيائية نلاحظ، تقريبا، أن $f(\vartheta,\varphi)$ ومن ثم $\sigma(\vartheta,\varphi)$ لاتعتمد فى حقيقة الأمر على φ. وهذا يعنى أنه فى المسألة المذكورة عند نهاية البند السابق يمكن الحصول على معلومات عن $V(r)$ من دراسة $|f(\vartheta)|^2$.

١٠-٤ تحليل إزاحة الطور[1]

فى معالجة نظرية الاستطارة كلاسيكيا من المعتاد تحليل الحزمة بدلالة بارامترات الصدمة لمساراتها المختلفة. هذا الإجراء لايمكن تصوره فى ميكانيكا الكم، وذلك لأن حزمة الجسيمات التى كميات حركاتها محددة يصاحبها عدم تحديد فى تقدير مواضعها وبالتالى مساراتها.

إذا كان كمية حركة الحزمة هى **p** وبارامتر الصدمة لها هو b فإنه كلاسيكيا تكون كمية الحركة الزاوية حول نقطة الأصل مساوية

$$p\,b \cong \hbar \ell \qquad (١٠-٢٧)$$

هذا يقترح علينا تحليل الحزمة بدلالة مركبات كمية حركتها الزاوية. عندما يكون نصف قطر التفاعل مساويا R، وافتراض أن الاستطارة تحدث فقط عند اصطدام جسيم الحزمة بالهدف، فهذا يعنى أن شرط حدوث الاستطارة هو

$$b \le R$$

أو من المعادلتين (١٠-٢٠)، (١٠-٢٧) نكتبه كالآتى:

$$\ell < kR \qquad (١٠-٢٨)$$

إذا كانت طاقة الحزمة صغيرة بدرجة كافية لجعل

$$kR < 1 \qquad (١٠-٢٩)$$

فإن الاستطارة تحدث فقط عندما يكون $\ell = 0$، (استطارة الموجة-S).

تم الوصول إلى الشرط (١٠-٢٩) بناء على اعتبارات كلاسيكية بحته، وينبغى لنا الحصول على نتائج مشابهة باستخدام ميكانيكا الكم.

---

(1) phase shift analysis

المعادلة (١٠-٢٩) توضح لنا الحد الكمـى تماما الـذى سـوف نتداولـه الآن ببعض من التفصيل.

لحزمة مستوية تتحرك فى اتجاه المحور-z حاملة كمية حركة p ($\hbar k=$) تبدو دالة حالتها فى الصورة

$$u_k(r,\vartheta,\varphi) = e^{\iota k z} = e^{\iota k r \cos\vartheta} \qquad (١٠-٣٠)$$

هذه المعادلة تشتمل على كل مركبـات كميـة الحركـة الزاويـة حـول نقطـة الأصل. نحصل على المركبة التى فيها كمية الحركة الزاوية تساوى صفر ($\ell=0$) مـن تكـامل تطـابق المعادلـة (١٠-٣٠) مـع الدالـة المتاحـة المناسـبة $Y_0^0(\vartheta,\varphi)$. ومنه يكون

$$u_{k,s}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int u_k(r,\vartheta,\varphi)Y_0^0(\vartheta,\varphi)d\Omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{\iota k r \cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta$$

أُختيرت عملية التسوية بالطريقة التى لاتتغير معهـا دالـة الحالـة u(r) (التـى تعد دالة فى r فقط وعليه فإنها تصف الموجة-S) من جراء هذه العملية. من السهل إجراء التكامل على φ، أما التكامل على ϑ فيتم من خلال التعويض

$$\cos\vartheta = w$$

$$-\sin\vartheta d\vartheta = dw$$

وعليه

$$u_{k,s}(r) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{\iota k r w}dw$$

$$= \frac{e^{\iota k r} - e^{-\iota k r}}{2\iota k r} \qquad (١٠-٣١)$$

واضح هنا أن المعادلة الأخيرة تصف تراكبا بين موجات كروية داخلة وخارجة. وهذا بالطبع هو التصور الميكانيكى الكمى للمسألة، الذى يختلف كلية عن التصور *الجسيمى* الكلاسيكى.

نأخذ فى الاعتبار الآن الجزء المعبر فقط عن الموجة-S فى دالة الحالة العامة للاستطارة، المعادلة (١٠-٢١). بالنسبة للموجة المستوية فالجزء المطلوب (الذى فيه $\ell=0$) هو بالطبع المعادلة (١٠-٣١). أما بالنسبة للموجة المستطارة فجزء الموجة-S بها هو الذى فيه قيمة الدالة $f(\vartheta)$ ثابتة (أى لاتعتمد علىϑ)، وذلك لأن أى دالة فى r فقط يكون فيها $\ell=0$. وعليه يبدو الشكل التقريبى لجزء الموجة-S فى دالة الحالة على النحو

$$u_s(r) \approx \frac{e^{\iota kr} - e^{-\iota kr}}{2\iota kr} + f\frac{e^{\iota kr}}{r} \qquad (١٠-٣٢)$$

(جزء الاستطارة الذى فيه $\ell=0$)+(جزء الحزمة الذى فيه $\ell=0$)

هذا يعنى أن استطارة الموجة-S ، عند طاقة ثابتة، تُعَين بدلالة عدد f، الذى ربما يكون مركبا. سنوضح فيما يلى أن الاستطارة يمكن التعبير عنها فى الواقع بدلالة عدد حقيقى مفرد.

عند تلاشى طاقة الوضع يُعْطَى جزء الموجة-S فى الحزمة المستوية بالمعادلة (١٠-٣١). يكمن تأثير طاقة الوضع فى تغيير الموجة الخارجة فقط، وذلك لأن دالة الاستطارة تتكون بصفة مطلقة من الموجات الخارجة. ومن هنا فإن الدالة الموجية المعبرة عن الاستطارة فقط تكتب فى الصورة

$$u_s(r) \approx \frac{Se^{\iota kr} - e^{-\iota kr}}{2\iota kr} \qquad (١٠-٣٣)$$

يتناسب فيض الموجة الكروية الداخلة مع

$$\left|e^{-\iota kr}\right|^2 = 1 \qquad (١٠-٣٤)$$

أما فيض الموجة الخارجة، باستخدام نفس الوحدات، يساوى

$$\left|S\, e^{\iota k r}\right|^2 = |S|^2 \qquad (١٠-٣٥)$$

يجب أن يتساوى هذان الفيضان حتى تكون دالـة الحالـة معبرة عن وضـع منتظم الاتصال بين الحزمة الساقطة والأشياء المستطارة، مع عدم تراكم كثافة احتمالية عند مالانهاية أو نقطة الأصل. هذا يعنى أن

$$|S|^2 = 1 \qquad (١٠-٣٦)$$

يتسنى لنا حينئذ وضع S فى صورة بارامتر حقيقى مفرد، وليكن δ، حيث

$$S = e^{2\iota\delta} \qquad (١٠-٣٧)$$

ومنه

$$u_S(r) \approx \frac{e^{2\iota\delta}e^{\iota k r} - e^{-\iota k r}}{2\iota k r} \qquad (١٠-٣٨)$$

$$= \frac{e^{\iota k r} - e^{-\iota k r}}{2\iota k r} + \left(\frac{e^{2\iota\delta} - 1}{2\iota k}\right)\frac{e^{\iota k r}}{r} \qquad (١٠-٣٩)$$

بمقارنة المعادلتين (١٠-٣٨)، (١٠-٣١) نجد أن تأثير طاقة الوضع يتجلى فـى إزاحـة طـور الموجـة الخارجـة بالنسبة إلـى الموجـة الداخلـة (جـزء الموجة-S من الحزمة المستوية الأصلية). لهذا السبب يطلق على البارامتر δ اسم إزاحة الطور.

وبالعودة إلى المعادلتين (١٠-٣٢)، (١٠-٣٩) نحصل على

$$f = \frac{e^{2\iota\delta} - 1}{2\iota k} = \frac{e^{\iota\delta}}{k}\left(\frac{e^{\iota\delta} - e^{-\iota\delta}}{2\iota}\right) \qquad (١٠-٤٠)$$

$$= \left(e^{\iota\delta}\sin\delta\right)/k$$

وعلى ذلك نستطيع التعبير عن استطارة الموجة-S بدلالة إزاحة الطـور، δ، المُمَثلة بعدد حقيقى.

المعادلة (١٠-٢٦) تعطى

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\vartheta) = \frac{\sin^2\delta}{k^2} \qquad (٤١-١٠)$$

أى أن التوزيع الزاوى يكون موحد الخواص فى جميع الاتجاهات.

مساحة المقطع الكلى للموجة-S تساوى

$$\sigma_S = \frac{4\pi\sin^2\delta}{k^2} = \pi\left(\frac{2\sin\delta}{k}\right)^2 \qquad (٤٢-١٠)$$

هذا يعنى أن المقدار $2\sin\delta/k$ يعبر عن نصف القطر الفعال من الهدف.

ولكن

$$\sin\delta \le 1$$

هذا يعنى أن

$$\sigma_S \le \frac{4\pi}{k^2}$$

وعليه فإن النهاية القصوى لاستطارة الموجة-S عند طاقة مناظرة للكمية k لاتعتمد على ديناميكية التفاعل (أى لاتعتمد على طاقة وضع التفاعل)، وبالتالى فإنها تعتمد على هندسة التفاعل فقط.

يجب ملاحظة أن إمكانية التعبير عن استطارة الموجة-S ($\ell=0$) بدلالة إزاحة طور مفردة تعتبر حالة عامة تماما ولاتتوقف على الشكل التفصيلى لطاقة الوضع $V(r)$، بشرط أن تتناقص $V(r)$ عند القيم الكبيرة للمسافة r بطريقة أسرع من الكمية $1/r$.

بمعلومية $V(r)$ نعين δ من حقيقة أن المعادلة (١٠-٣٨) هى الشكل التقريبى لحل معادلة شرودنجر. عند طاقة معينة نحصل على إزاحة الطور δ بنفس الطريقة تقريبا التى فيها نجد الشروط الابتدائية تُعَيِّن مستويات الطاقة لنظام مقيد.

توصف الاستطارة الكلية الناشئة عن طاقة وضع معينة V(r) عند طاقة ما بواسطة فئة من إزاحات الطور $\delta_\ell(k)$ (أى إزاحة واحدة للطور لكل كمية حركة زاوية ℓ). إلا أن الإزاحات δ_ℓ المناظرة للكمية ℓ وتحقق المعادلة (١٠-٢٨) هى فقط التى سوف تختلف عن الصفر.

الحالة الخاصة البسيطة التى نحصل فيها على قيمة مضبوطة لإزاحة الطور δ هى استطارة الموجة-S بواسطة كرة صلبة.

تعطى طاقة الوضع بواسطة المعادلة (١٠-١٧). وطبقا للمعادلة (٧-١٠) نضع

$$\chi_S(r) = r u_S(r)$$

لذلك عندما يكون $r > a$ نجد أن الدالة χ_S تحقق المعادلة

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - E\right]\chi_S(r) = 0 \quad , \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

أو المعادلة

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right]\chi_S(r) = 0 \qquad (١٠-٤٤)$$

لابد للحل أن يأخذ شكل المعادلة (١٠-٣٨) (مع استبعاد معامل r)، ويجب أيضا أن يحقق شرط الحدود الخاص بالكرة الصلبة (انظر المعادلة (٣-٢٣)) وهو

$$\chi_S(a) = 0 \qquad (١٠-٤٥)$$

ومنه يكون

$$\delta = -ka \qquad (١٠-٤٦)$$

وتصبح مساحة المقطع الكلى لاستطارة الموجة-S مساوية

$$\sigma_S = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2 ka \qquad (١٠-٤٧)$$

عند حد الطاقة المنخفضة للغاية، أى عندما يكون

$$ka << 1$$

فإن الاستطارة الناشئة من الموجة-S فقط هى التى تتم بالفعل، انظر المعادلة (١٠-٢٩)، وحينئذ نعتبرها الاستطارة الكلية. وعليه

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}(ka)^2 = 4\pi a^2 \qquad (١٠-٤٨)$$

واضح أن مقدار هذه الكمية يعادل أربعة أضعاف مساحة المقطع الكلاسيكى الناتجة من استطارة جسيمات نقطية بواسطة كرة صلبة لها نفس نصف القطر، المعادلة (١٠-١٣).

١٠-٥ النظام المعملى ونظام مركز الكتلة[1]

فى دراستنا السابقة افترضنا استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة مركز استطارة ثابت (هدف ثابت). فى حقيقة الأمر يتمتع الهدف دائما بحرية الحركة ومن الضرورى تصحيح النظرية لتشمل هذه الحركة. فى البند ٧-٥ استعرضنا الوسيلة لعمل ذلك أثناء دراسة ذرة الهيدروجين.

من الممكن دائما التعبير عن حركة جسيمين واقعين تحت تأثير التفاعل المتبادل بينهما بدلالة الحركة الحرة لمركز الثقل[2] والحركة النسبية بينهما. للحركة النسبية أهميتها الفيزيائية، وكما أشرنا بالبند ٧-٥ توصف هذه الحركة بنفس المعادلات المذكورة من قبل، على شرط اعتبار الكتلة m على أنها الكتلة المختصرة μ،

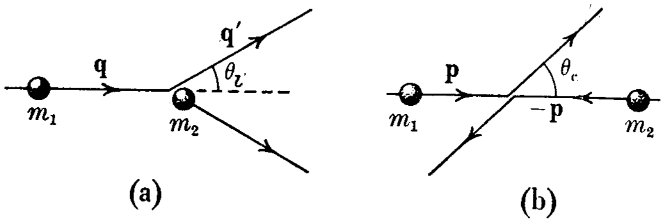
$$\frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (١٠-٤٩)$$

---

(1) laboratory and centre of mass systems (2) centre of gravity

واعتبار p على أنها كمية حركة الحزمة فى محاور الإحداثيات التى فيها كمية الحركة الكلية للنظام تساوى صفر. هنا m_1 هى كتلة جسيم الحزمة، m_2 هىكتلة الهدف. نظرا لأن مركز الكتلة يكون ساكنا فى هذا النظام فقد أطلق اسم محاور إسناد مركز الكتلة[1] على النظام الإحداثي الذى يحتوى هذا النظام.

فى واقع الأمر تجرى التجارب فى المعمل حيث تكون كمية حركة جسيمات الحزمة مساوية q، مثلا، ويكون الهدف ساكنا. يطلق على النظام الإحداثى الحاوى لهذه العملية اسم محاور الإسناد المعملية[2].



شكل ١٠-٥ عملية التصادم موضحين زاوية الاستطارة وكمية الحركة فى (أ) النظام المعملى (ب) نظام مركز الكتلة.

لكى نتمكن من مقارنة التجارب المعملية مع الحسابات النظرية من الضرورى تحويل مايتم ملاحظته بالفعل فى محاور الإسناد المعملية إلى مايجب أن نلاحظه فى محاور إسناد مركز الكتلة. ونظرا لأن عملية ملاحظة الفيض المستطار تتم بواسطة أجهزة ماكروسكوبية (ترى بالعين)

---

(1) C. M. frame (2) Lab. frame

فإن عملية التحويل هذه تعد مسألة كلاسيكية بحتة، ويمكن حلها باستخدام الأفكار الكلاسيكية العادية.

شكل ١٠-٥ يوضح التصادم كما يبدو فى النظامين المعملى ونظام مركز الكتلة. q هى كمية الحركة الكلية فى محاور الإسناد المعملية. لذلك فإن سرعة مركز الكتلة υ تساوى

$$\upsilon = \frac{q}{m_1 + m_2} \qquad (١٠-٥٠)$$

محاور إسناد مركز الكتلة تتحرك فى اتجاه الحزمة بسرعة مقدارها υ نسبة إلى محاور الإسناد المعملية. وعليه فإن العلاقة بين كميات الحركة فى النظامين هى

$$p = q - m_1\left(\frac{q}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_2 q}{m_1 + m_2} \qquad (١٠-٥١)$$

وحيث أن كمية الحركة الكلية تساوى صفر فهذه القيمة يجب أن تساوى أيضا قيمة كمية الحركة لجسيم الهدف فى محاور إسناد مركز الكتلة (هذا يتضح مباشرة من المعادلة (١٠-٥٠)). من قانون حفظ كمية الحركة نرى أن ذلك متحقق أيضا بالنسبة لكميات الحركة بعد التصادم.

إذا كان q' هى كمية الحركة النهائية لجسيم الحزمة فى محاور الإسناد المعملية فإن المركبة الطولية لكمية الحركة النهائية لجسيم الحزمة تخضع للعلاقة، انظر شكل ١٠-٥

$$\begin{aligned} q'\cos\vartheta_\ell &= p\cos\vartheta_c + m_1\left(\frac{q}{m_1 + m_2}\right) \\ &= p\cos\vartheta_c + \frac{m_1}{m_2}p \end{aligned} \qquad (١٠-٥٢)$$

أما المركبة المستعرضة لكمية الحركة الخطية فمتساوية فى كلا النظامين

$$q' \sin\vartheta_\ell = p \sin\vartheta_c \qquad (١٠-٥٣)$$

باستخدام المعادلتان السابقتان نحصل على

$$\tan\vartheta_\ell = \frac{\sin\vartheta_c}{\cos\vartheta_c + (m_1/m_2)} \qquad (١٠-٥٤)$$

من الواضح أن زاوية السمت حول اتجاه الحزمة متساوية في كلا النظامين، أي أن

$$\vartheta_\ell = \vartheta_c \qquad (١٠-٥٥)$$

نفرض أن $\vartheta_\ell, \varphi_\ell$ تعينان زاوية مجسمة ما، $d\Omega(\theta_\ell,\varphi_\ell)$، في محاور الإسناد المعملية وأن ϑ_c,φ_c تعينان زاوية مجسمة أيضا، $d\Omega(\vartheta_c,\varphi_c)$، ولكن في محاور إسناد مركز الكتلة. عند ملاحظة استطارة جسيمات فيزيائية معينة خلال الزاوية $d\Omega(\vartheta_\ell,\varphi_\ell)$ في محاور الإسناد المعملية أثناء فترة زمنية معينة فإن نفس الجسيمات سوف يتم ملاحظتها خلال الزاوية $d\Omega(\vartheta_\ell,\varphi_\ell)$ في محاور إسناد مركز الكتلة. ذلك لأن فيض جسيمات الحزمة بالنسبة إلى الهدف لايتغير بإعطاء سرعة منتظمة للنظام ككل. على ذلك ينبغي أن يكون

$$\sigma(\vartheta_c,\varphi_c)d\Omega(\vartheta_c,\varphi_c) = \sigma(\vartheta_\ell,\varphi_\ell)d\Omega(\vartheta_\ell,\varphi_\ell) \qquad (١٠-٥٦)$$

أو يكون

$$\sigma(\vartheta_\ell,\varphi_\ell) = \sigma(\vartheta_c,\varphi_c)\frac{\sin\vartheta_c}{\sin\vartheta_\ell}\frac{d\vartheta_c}{d\vartheta_\ell}\frac{d\varphi_c}{d\varphi_\ell} \qquad (١٠-٥٧)$$

لهذا فمن المعادلتين (١٠-٥٤)، (١٠-٥٥) وبعد إجراء بعض الحسابات الجبرية، نجد أن

$$\sigma(\vartheta_\ell,\varphi_\ell) = \frac{\left[1+(m_1/m_2)^2 + 2(m_1/m_2)\cos\vartheta_c\right]^{3/2}}{\left[1+(m_1/m_2)\cos\vartheta_c\right]}\sigma(\vartheta_c,\varphi_c)$$

(١٠-٥٨)

طاقة حركة النظام فى محاور الإسناد المعملية تساوى

$$T_\ell = \frac{q^2}{2m_1} \qquad (١٠-٥٩)$$

وفى محاور إسناد مركز الكتلة تساوى

$$T_c = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2\mu} \qquad (١٠-٦٠)$$

ومن المعادلة (١٠-٥١) نحصل على

$$T_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_\ell \qquad (١٠-٦١)$$

فى كل ماسبق من معادلات واضح لنا أن محاور الإسناد المعملية تكافىء محاور إسناد مركز الكتلة عندما تؤول m_2 إلى مالانهاية، وحينئذ تصبح عملية إهمال ارتداد الهدف من التقريبات المقبولة إذا كان

$$\frac{m_1}{m_2} << 1 \qquad (١٠-٦٢)$$

يكون التمييز بين محاور الإسناد المعملية ومحاور إسناد مركز الكتلة له أهميته القصوى عندما تكون كتل جسيمات الحزمة والهدف متقاربة، كما فى حالة استطارة البروتون–نيوترون

١٠-٦ ملخص

فيما سبق قدمنا النظريتين الميكانيكية الكلاسيكية والكمية لاستطارة حزمة من الجسيمات بواسطة جسيمات الهدف، حيث تمكنا من الحصول على معلومات عن التفاعلات المتبادلة بين الجسيمات. وقد وضحنا ذلك بالبند ١٠-٢ عندما قارنا بين تأثيرات نوعين من طاقات وضع التفاعل.

بالنسبة للنظرية الكمية نجد أن النتائج الأكثر أهمية محتواه فى المعادلات من (١٠-٤٠) حتى (١٠-٤٣). هذه المعادلات توضح أن استطارة الموجة-S، عند أى طاقة للجسيمات الساقطة وتحت تأثير أى طاقة وضع، يمكن وصفها بدلالة بارامتر حقيقى مفرد، δ، المسمى بإزاحة الطور.

مسائل ١٠

١٠-١ بارامتر الصدمة لمسار الانحراف الحادث به ϑ يساوى

$$b(\vartheta) = a\cos^2(\vartheta/2)$$

أوجد مساحة المقطع التفاضلى ومساحة المقطع الكلى.

١٠-٢ يتطلب قانون حفظ الاحتمال أن الكمية S المعرفة بالمعادلة (١٠-٣٣) تحقق العلاقة

$$SS^* = 1$$

بالتعبير عن f بدلالة S وضح أن هذا يؤدى إلى النتيجة التالية:

$$f - f^* = 2\iota k f f^*$$

وعليه نحصل فى استطارة الموجة-S على

$$4\pi \,\mathrm{Im}\, f = k\,\sigma_{tot}$$

الباب الحادى عشر

تفاعل النيوكلون- نيوكلون[1]

١١-١ الديوترون[2]

كما بنينا فهمنا العميق للتركيب الذرى من الدراسة المفصلة لأبسط الذرات، وهى ذرة الهيدروجين، فإن معظم المعلومات المباشرة عن تفاعل النيوكلون-نيوكلون تُستوحى من دراسة نظام مكون من اثنين من النيوكلونات. نستخلص الجزء الأعظم من المعلومات من تجارب استطارة النيوكلون-نيوكلون، ولحسن الحظ يوجد حالة مقيدة فى نظام النيوترون-بروتون (الديوترون). هذا النظام عبارة عن نواة الهيدروجين الثقيل المسماة بالديوتريوم. باعتبارنا لهذا النظام نحصل على معلومات بالغة الأهمية عن طبيعة طاقة وضع النيوكلون-نيوكلون[3].

رأينا من قبل أن المقياس النووى للمسافة حوالى 10^{-12} cm، وأن طاقة الوضع النووية عبارة عن تفاعل قصير المدى يؤثر على مسافات لاتزيد عن 10^{-12} cm. عندما يكون مدى طاقة الوضع النووية كبيرا بدرجة كافية لجعل أزواج عدد A من النيوكلونات تتفاعل مع بعضها البعض فإننا نتوقع لطاقة الربط أن تتغير مع تغير المقدار $[A(A-1)]/2$، وذلك لأن هذا المقدار يمثل عدد الأزواج المتفاعلة. فى واقع الأمر، للأنوية الثقيلة التى تمتاز بتأثيرات سطحية صغيرة نجد أن طاقة ربطها (وكذلك حجمها) تتغير مع تغير A. هذا يقترح علينا أن مدى طاقة الوضع لابد أن يكون صغيرا

---

(1) nucleon-nucleon interaction (2) deutron (3) nucleon-nucleon potential

إلى الحد اللازم لجعل كل نيوكلون يتفاعل فقط مع أقرب النيوكلونات إليـه. هذا المدى يقدر على أساس المعادلة (٩-٣٦) ليساوى

$$a \cong 1.5 \times 10^{-15} \text{ m}$$

للتبسيط نفرض أن طاقة الوضع مركزية (أى تعتمد فقط على المسافة بين النيوكلونـات)، وبذلك تشبه الحالة الأرضية فى ذرة الهيدروجين. كميـة الحركة الزاوية للديوترون تساوى صفر، أى أنه واقع فى الحالة-S.

فـى دراستنا لذرة الهيدروجين كانت طاقة الوضع معلومة وكانت مشكلتنا هى إيجاد قيم مستويات الطاقات المتاحة. أما فـى حالة الديوترون تُؤخذ طاقة الربط من التجارب المعملية لتُستخدم فـى وضع شروط على شكل طاقة الوضع. طاقة الربط هذه، ε، هى الطاقة اللازمة لفصل اثنين من النيوكلونات. أى أنها تساوى الفرق بين طاقة السكون لكل من البروتون والنيوترون وطاقة السكون للديوترون، أى تساوى

$$\varepsilon = \left(m_p + m_n\right)c^2 - m_d c^2 \qquad (1\text{-}11)$$

وجد تجريبيا أن

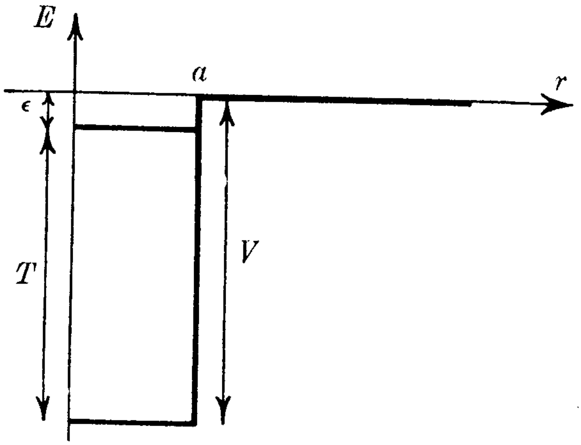
$$\varepsilon \cong 2\text{MeV} \qquad (2\text{-}11)$$

إذا كان كل من البروتون والنيوترون فى الديوترون يرتبطان ببعضهما بواسطة طاقة وضع مداها يساوى a، مثلا، فإن المسافة الفاصلة بينهما لابد أن تكون فـى حدود قيمة a. من مبدأ عدم التحديد هذا يعنـى أن كميـة حركتيهما النسبية يجب أن تكون، على الأقل، فى حدود مقدار ما p، حيث (انظر الملحق)

$$p \cong \frac{\hbar}{a} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{1.5 \times 10^{-15}} \text{ mks} \qquad (3\text{-}11)$$
$$\cong 130 \text{ MeV/c}$$

طاقة الحركة المتبادلة[1] هى

$$T = \frac{p^2}{2\mu} \qquad (١١-٤)$$



شكل ١١-١ منحنى الطاقة للديوترون فى تقريب البئر المربع.
لجسيم طاقة ربطه ε يجب أن تكون طاقة حركته T ، حيث
T+ε=V. إذا كان ε«T فطبقا لمبدأ عدم التحديد نجد أن ε«V.

حيث μ هى الكتلة المختصرة

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n} \qquad (١١-٥)$$

$$\therefore\ T \cong 20\ \text{MeV} \qquad (١١-٦)$$

طاقة الربط ε هى الفرق بين طاقة الوضع السالبة V (طاقة الوضع الجاذبة التى تربط الجسيمات بعضها ببعض) وطاقة الحركة T الناتجة من الحركة النسبية للجسيمات. إلا أن ε أصغر بكثير من T، وعليه يتضح أن (انظر شكل ١١-١)

---

(1) mutual kinetic energy

$$V \cong T >> \varepsilon \qquad (١١-٧)$$

كتقريب أوّلى نفرض أن طاقة الوضع عبارة عن بئر مربع نصف قطره a وعمقه V، أى أن

$$\begin{aligned} V(r) &= -V \quad , \quad r \le a \\ V(r) &= 0 \quad , \quad r > a \end{aligned} \qquad (١١-٨)$$

حينئذ يكون ε- هى القيمة المناسبة لطاقة الجسيمات المتحركة داخل بئر الجهد والمنتمية للحالة التى فيها ℓ=0 . إذا كانت الدالة المناسبة لوصف هذه الحالة هى χ(r) فعندئذ يكون، انظر المعادلة (٧-١٠)،

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r)\right]\chi(r) = -\varepsilon\,\chi(r) \qquad (١١-٩)$$

ولهذا نجد

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - K^2\right)\chi = 0 \quad , \quad r > a \qquad (١١-١٠)$$

حيث

$$K^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} \qquad (١١-١١)$$

وكذلك

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)\chi = 0 \quad , \quad r \le a \qquad (١١-١٢)$$

حيث

$$k^2 = \frac{2\mu(V-\varepsilon)}{\hbar^2} \cong \frac{2\mu V}{\hbar^2} \qquad (١١-١٣)$$

لابد للدالة χ أن تؤول للصفر عند مالانهاية وللدالة χ/r أن تكون محدودة عند نقطة الأصل، وبالتالى يصبح الحل فى الصورة

$$\chi = A\sin kr \quad , \quad r \le a \qquad (١١-١٤)$$

$$\chi = Be^{-Kr} \quad , \quad r > a \qquad (١١-١٥)$$

ونظرا لاتصال χ، χ' عند النقطة $r = a$ فإننا نحصل على

$$A\sin ka = Be^{-Ka} \qquad (١١-١٦)$$

$$kA\cos ka = -K\,Be^{-Ka} \qquad (١١-١٧)$$

بأخذ النسبة بين هاتين المعادلتين (قارن مع المعادلة (٤-٥٠)) نجد

$$k\cot ka = -K \qquad (١١-١٨)$$

التى منها نعين قيمة ε بمعلومية كل من a,V. باستخدام التقريب (١١-١٣) نحصل على

$$\cot ka = -\frac{K}{k} \cong -\left(\frac{\varepsilon}{V}\right)^{1/2} \qquad (١١-١٩)$$

وهى قيمة صغيرة. لهذا

$$ka \cong \pi/2 \qquad (١١-٢٠)$$

من هذه المعادلة والتعريف (١١-١٣) نجد الآتى:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} = \frac{2\mu V}{\hbar^2} \qquad (١١-٢١)$$

أو

$$a^2V = \frac{\pi^2\hbar^2}{4m_n} \qquad (١١-٢٢)$$

العلاقة الأخيرة التى تربط بين عمق بئر الجهد ونصف قطره هى الشرط الموضوع على طاقة الوضع من الحقيقة التجريبية (وهى أن طاقة ربط الديوترون صغيرة). الصورة الدقيقة للعلاقة تعتمد على الشكل الذى اخترناه لطاقة الوضع، إلا أنه باختيار شكل آخر لطاقة الوضع نحصل على شرط مشابه يوضع على حجم طاقة الوضع، a^2V، التى ينبغى أن نحصل عليها.

فى الإمكان دراسة العلاقة بين V,a بطريقة أخرى، كما يلى:

تتناقص دالة حالة الديوترون فى المنطقة r > a تبعا للمعامل exp[-rK]. لذلك يجب تعريف نصف قطر الديوترون بالمقدار 1/K، حيث أن هذا المقدار يعد مقياسا لمدى قيم r التى نحصل عندها على احتمال معتبر لتواجد الجسيمات.

من التعريف (١١-١١) نجد

$$\frac{1}{K} = \frac{\hbar}{(m_n \varepsilon)^{1/2}} \qquad (١١-٢٣)$$

ولكن من شرط الربط الضعيف (١١-٢٢) يصبح نصف قطر طاقة الوضع مساويا

$$a = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{(m_n V)^{1/2}} \qquad (١١-٢٤)$$

لهذا

$$\frac{(1/K)}{a} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^{1/2} \qquad (١١-٢٥)$$

وهذا عبارة عن عدد أكبر من الواحد الصحيح.

من المعادلات (١١-٢)، (١١-٦)، (١١-٧) نستخلص أن قيمة هذا العدد فى حدود ثلاثة. ومن هنا نرى أن نصف قطر الديوترون أكبر بصورة بينة من نصف قطر طاقة الوضع. إنه حقا تركيب ترابطى ضعيف جدا الذى فيه تقضى الجسيمات معظم وقتها خارج مدى طاقة الوضع الجاذبة التى تربط بين بعضها البعض.

١١-٢ استطارة النيوترون-بروتون[1]

نعتبر الآن استطارة حزمة من النيوترونات بواسطة البروتونات عند

---

(1) neutron-proton scattering

طاقات منخفضة. أى عند الطاقات التى يحدث عندها استطارة للحالة التى فيها $\ell=0$.

سنوضح فيما يلى أنه يمكن التعبير عن ذلك بدلالة طاقة ربط الديوترون.

نضع التعريف

$$U(r)=\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r) \qquad (٢٦-١١)$$

حيث يفترض تلاشى $V(r)$ خارج نصف قطر محدد. لهذا الحال إذا كانت طاقة الجسيمات فى محاور إسناد مركز الكتلة تساوى $\hbar^2 k_1^2/2\mu$ فإن دالة الحالة χ_1 تحقق المعادلة (٧-١٠)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_1^2-U(r)\right]\chi_1(r)=0 \qquad (٢٧-١١)$$

بالمثل عند كمية حركة أخرى نجد

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k_2^2-U(r)\right]\chi_2(r)=0 \qquad (٢٨-١١)$$

بضرب المعادلة (١١-٢٧) فى χ_2 والمعادلة (١١-٢٨) فى χ_1 والطرح، مع ملاحظة أن

$$\chi_2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi_1-\chi_1\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi_2\equiv\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_2\frac{d\chi_1}{dr}-\chi_1\frac{\partial\chi_2}{\partial r}\right) \qquad (٢٩-١١)$$

نجد

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi_2\frac{d\chi_1}{dr}-\chi_1\frac{\partial\chi_2}{\partial r}\right)+\chi_1\chi_2\left(k_1^2-k_2^2\right)=0 \qquad (٣٠-١١)$$

بتكامل هذه المعادلة فىالمنطقة بين الصفر وقيمة كبيرة ما لنصف القطر R نحصل على

$$\left[\chi_2\frac{\partial\chi_1}{\partial r}-\chi_1\frac{\partial\chi_2}{\partial r}\right]_0^R=\left(k_2^2-k_1^2\right)\int_0^R\chi_1\chi_2\,dr \qquad (٣١-١١)$$

وإذا كان الشكل التقريبى للدالة $\chi(r)$ عند مسافات كبيرة r هو $\phi(r)$ فبنفس الطريقة نحصل على

$$\left[\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right]_0^R = \left(k_2^2 - k_1^2\right)\int_0^R \phi_1 \phi_2 \, dr \qquad (٣٢-١١)$$

وذلك لأن ϕ تحقق نفس المعادلة التى تحققها χ، ماعدا فقط استبدال U(r) بالصفر عند مسافات كبيرة. بطرح المعادلة (١١-٣٢) من المعادلة (١١-٣١) وتقييم النتائج عندما تؤول R إلى مالانهاية نجد الآتى:

لقيم R الكبيرة نحصل على

$$\phi(R) = \chi(R) \quad ; \quad \chi(0) = 0$$

ولهذا

$$\left[\phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right]_{r=0} = \left(k_2^2 - k_1^2\right)\int_0^R \left(\chi_1 \chi_2 - \phi_1 \phi_2\right) dr \qquad (٣٣-١١)$$

عندما يكون المقدار k_1^2 موجبا فإن الوضع القائم يعبر عن استطارة، وطبقا للمعادلة (١٠-٣٨) يكون

$$\phi_{k_1}(r) = \phi_k(r) \approx \left[\frac{e^{\iota(kr+\delta)} - e^{-\iota(kr+\delta)}}{2\iota k}\right] e^{\iota\delta} \qquad (٣٤-١١)$$

$$= \frac{\sin(kr+\delta)}{\sin\delta} \qquad (٣٥-١١)$$

حيث من الملائم ضبط عملية التسوية لكى يصبح

$$\phi_k(0) = 1 \qquad (٣٦-١١)$$

إذا كانت قيمة المقدار k_2^2 سالبة فإننا نحصل على حالة مقيدة.

يمكن وضع

$$k_2^2 = -K \qquad (٣٧-١١)$$

وهو نفس الرمز المستخدم فى البند السابق. وعليه

$$\phi_{K_2} = \phi_K = e^{-Kr} \qquad (٣٨-١١)$$

التى تُسوى هى الأخرى ليصبح

$$\phi_K(0) = 1 \qquad (٣٩-١١)$$

نظرا لأن طاقة الوضع من النوع قصير المـدى فـإن الصـور الافتراضيـة[1] للدوال ϕ تساوى دالة الحالة المضبوطة المناظرة، وذلـك علـى معظـم مـدى التكامل بالمعادلة (١١-٣٣). كتقريب من الرتبة الأولى يمكـن إهمـال الحـد المحتوى على هذا التكامل. بتتبـع هـذا التقريـب والتعويـض مـن المعـادلتين (١١-٣٥)، (١١-٣٨) فى المعادلة (١١-٣٣) نحصل على

$$k \cot \delta = -K \qquad (٤٠-١١)$$

وحيث أن K ترتبـط مباشـرة بطاقـة الربـط، المعادلـة (١١-١١)، فـإن هـذه العلاقة تعين إزاحة طور الموجة-S، وبالتالى تعين إزاحة طـور الاسـتطارة عند الطاقات المنخفضة بدلالة طاقة ربط الديوترون. لقيم k الصغيرة نجد

$$\delta \cong -k/K \qquad (٤١-١١)$$

هذا يوضـح (بالمقارنــة بالمعادلـة (١٠-٤٦)) أن نصـف قطـر الديوتـرون، $1/K$، يعادل نصف قطر الكرة الصلبة المكافئة، وذلك فـى حالـة الاسـتطارة عند الطاقات المنخفضة للغاية. فى محيط هذا التقريب نحصل على

$$\sigma = \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2} = \frac{4\pi \delta^2}{k^2}$$

$$= \frac{4\pi}{K^2} \qquad (٤٢-١١)$$

$$= \frac{4\pi\hbar^2}{m_n \varepsilon}$$

---

(1) asymptotic forms

بالتعويض بالقيم المقاسة تجريبيا فى المعادلة السابقة نحصل على مساحة المقطع المحسوبة نظريا، وهى فى حدود المقدار $2\times10^{-24}\ cm^2$ (=2 barn).

أما مساحة المقطع المقاسة تجريبيا فتساوى 50 barn .

نظرا لأن المبادىء التى تم على أساسها استنتاج المعادلة (١١-٤٢) عامة للغاية (فهى تعتمد فقط على افتراض قصر مدى طاقة الوضع) فيبدو لنا لأول وهلة غرابة التباين الشديد بين القيمتين النظرية والتجريبية لمساحة المقطع. إلا أن تفسير هذا التباين فى غاية السهولة. فالنيوكلونات تشبه الإلكترونات، بمعنى أنه يصاحبها هى الأخرى حركة مغزلية. بأخذ هذه الحركة فى الاعتبار تعود مرة أخرى الأمور إلى نصابها.

١١-٣ التفاعلات المعتمدة على المغزلية

إذا كان لكل من البروتون والنيوترون مغزلية مقدارها 1/2 (مقاسة بوحدات $\hbar$) فطبقا للوجهة الكلاسيكية تأخذ المغزلية الكلية لنظام البروتون-نيوترون أى مقدار واقع فى المدى بين الصفر والواحد الصحيح. هذا المقدار سوف يعتمد على التوجيه النسبى لمتجهى المغزلية. نحصل على القيمتين العظمى والصغرى للمغزلية الكلية من التشكيل المتوازى والمتوازى ضديديا، على الترتيب لمتجهى المغزلية. أما من الناحية الكمية فنعلم أنه يتاح لنا قيمتان فقط للمغزلية الكلية، وهما الصفر والواحد الصحيح.

لتأكيد المفهوم السابق يكفى حساب عدد الحالات المستقلة للمغزلية. يبقى هذا العدد بدون تغيير عند تعيين الحالات المستقلة للمغزلية بدلالة المغزلية الكلية لجسيمى النظام ككل وتوجيهها، أو بدلالة المغزليات المنفردة لكل جسيم على حده وتوجيهها، وذلك بسبب تكافؤ هاتين الطريقتين.

المغزليات المنفردة للبروتون أو النيوترون تكون إما لأعلى أو لأسفل نسبة إلى اتجاه اختيارى معين. ينشأ عن هذا التصنيف الحالات التى أشرنا إليها بالبند السابق بالرموز <½| ,<½-|. وعليه يتواجد أربع حالات مستقلة نشير إليها بالرموز

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n,\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_p\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n,\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_n,\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_p\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_n$$

إذا أطلقنا على المغزلية الكلية الرمز j فهذا يعنى وجود عدد 2j+1 من الحالات المستقلة للمغزلية (انظر الباب السادس). على ذلك إن وجد ثلاث حالات المغزلية الكلية لكل منها تساوى الواحد الصحيح، بالإضافة إلى حالة واحدة المغزلية الكلية لها تساوى الصفر، فهذا مرة ثانية يعطينا العدد الكلى الصحيح للحالات المستقلة للمغزلية .

بالإشارة إلى الحالة التى مغزليتها الكلية j والمركبة-z لها m بالرمز <j,m| فإن الطريقتين المتبعتين لتعيين حالات المغزلية ترتبطان بالعلاقات

$$\begin{aligned}
|1,+1\rangle &= |+1/2\rangle_p|+1/2\rangle_n\\
|1,0\rangle &= (1/2)^{1/2}\left[|+1/2\rangle_p|-1/2\rangle_n+|-1/2\rangle_p|+1/2\rangle_n\right]\\
|1,-1\rangle &= |-1/2\rangle_p|-1/2\rangle_n\\
|0,0\rangle &= (1/2)^{1/2}\left[|+1/2\rangle_p|-1/2\rangle_n-|-1/2\rangle_p|+1/2\rangle_n\right]
\end{aligned} \qquad (٤٣-١١)$$

نحصل عل الحالتين <1,+1| ، <1,-1| بترتيب المغزليتين المنفردتين لكل من البروتون والنيوترون بالطريقة التى تجعل المركبة-z الكلية للنظام ككل مساوية 1+ مرة، 1- فى المرة الأخرى. يأتى بعد ذلك التشكيل <1,o| الذى يتمتع أيضا (كما فى التشكيلين السابقين <1,+1| ، <1,-1|) بخاصية التماثل

تحت عملية الاستبدال p↔n. أما الحالة <o,o| فلابد أن تتكون من تراكب متماثل ضديديا، نظرا لتعامدها مع الحالات الثلاث السابقة.

يصاحب كل من البروتون والنيوترون حركة مغزلية، وبالتالي يجب إدخال مؤثرات المغزلية لباولي $\hat{\sigma}_n,\hat{\sigma}_p$ (المؤثر $\hat{\sigma}$ له المركبات $\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$). لابد لطاقة وضع التفاعل أن تعتمد على هذين المؤثرين، بالضبط كما كان طاقة وضع الإلكترون الواقع تحت تأثير مجال مغناطيسي معتمدة على $\hat{\sigma}\cdot B$ (انظر المعادلة (٨-٥٢)).

لابد لطاقة الوضع أن تكون كمية قياسية، وعليه فإن المؤثرات المغزلية، التي تكتب في صورة متجه محوري؛ لابد أن تظهر مضروبة ضربا قياسيا في متجه محوري آخر. الإمكانية الواضحة لعمل ذلك تتجلى في الكمية $(\hat{\sigma}_n+\hat{\sigma}_p)\cdot\hat{\ell}$. مع العلم بأن مركبات $\hat{\ell}$ هي مؤثرات كمية الحركة الزاوية المدارية، المعادلة (٦-٢). إلا أنه في الحالة التي فيها $\ell=0$ لايضيف هذا المؤثر بالتأكيد أي مساهمة . من أبسط الحدود التي لاتتلاشى في مسألتنا هي طاقة وضع التفاعل المتناسبة مع الكمية القياسية $\hat{\sigma}_p\cdot\hat{\sigma}_n$.

لحساب تأثير هذا المؤثر على الحالات التي مغزليتها الكلية مساوية $j=0,|0\rangle;j=1,|1\rangle$ نكتب العلاقة بين المؤثرات

$$\hat{J}=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_p+\hat{\sigma}_n) \qquad (١١-٤٤)$$

لهذا

$$\hat{\sigma}_p\cdot\hat{\sigma}_n=2\left[\hat{J}^2-\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_p\right)^2-\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_n\right)^2\right] \qquad (١١-٤٥)$$

ومنه بالتأثير على الحالة المناسبة <j| نجد

$$\hat{\sigma}_p\cdot\hat{\sigma}_n|j\rangle=2\left\{j(j+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right\}|j\rangle \qquad (١١-٤٦)$$

وهذا يتأتى من المعادلة (١١-٤٣) نظرا لأن $\hat{\sigma}_p$ يؤثر فقط على الحالات المناسبة $|\pm 1/2\rangle_p$، $\hat{\sigma}_n$ يؤثر فقط على الحالات المناسبة $|\pm 1/2\rangle_n$. بعد التعويض عن قيم j نحصل على

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n |1\rangle = |1\rangle \qquad (١١-٤٧)$$

$$\hat{\sigma}_p \cdot \hat{\sigma}_n |0\rangle = -3|0\rangle \qquad (١١-٤٨)$$

نفرض أن طاقة وضع التفاعل بين النيوترون والبروتون تساوى

$$V_C(r) + \hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_p V_S(r) \qquad (١١-٤٩)$$

يجب على دالة الحالة أن تحتوى (بالإضافة إلى الجزء الفراغى منها) على معامل يعين مغزلية النيوكلونات. من الأنسب عمل هذه الإضافة بدلالة المغزلية الكلية، وذلك بواسطة أحد متجهات المغزلية $|j\rangle$.

للاستطارة التى فيها $\ell = 0$ تكتب معادلة شرودنجر المناسبة كالآتى:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_C(r) + \hat{\sigma}_n \cdot \hat{\sigma}_p V_S(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\right]\chi_j(r)|j\rangle = 0 \qquad (١١-٥٠)$$

عندما يكون $|j\rangle = |1\rangle$ نحصل على، باستخدام المعادلة (١١-٤٧)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_C(r) + V_S(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\right]\chi_1(r) = 0 \qquad (١١-٥١)$$

حيث اختصرنا متجه المغزلية $|j\rangle$ من دالة الحالة الكلية نظرا لعدم وجود أى مؤثرات بعد تعتمد على المغزلية. بالمثل، باستخدام المعادلة (١١-٤٨) عندما يكون $|j\rangle = |o\rangle$ نجد الآتى

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_C(r) - 3V_S(r) - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\right]\chi_0(r) = 0 \qquad (١١-٥٢)$$

للديوترون مغزلية مساوية للواحد الصحيح، ولذلك دالة حالته حل للحالة المقيدة بالمعادلة (١١-٥١). باتباع نفس المفاهيم المذكورة بالبند

السابق نرى أن هذا الحل يعين استطارة الطاقات المنخفضة، σ_1 (للحالات التى مغزليتها مساوية للواحد الصحيح) تحت تأثير طاقة الوضع الفعالة

$$V_1(r) = V_C(r) + V_S(r) \qquad (٥٣-١١)$$

تعين استطارة الطاقات المنخفضة، σ_0 ، للحالات التى مغزليتها تساوى صفر من طاقة الوضع الفعالة المستقلة تماما الموجودة بالمعادلة (١١-٥٢)

$$V_0(r) = V_C(r) - 3V_S(r) \qquad (٥٤-١١)$$

نظرا لوجود ثلاث حالات بمغزلية مساوية للواحد الصحيح، وحالة واحدة فقط مغزليتها مساوية للصفر، وأيضا لتساوى احتمال تواجد الجسيم فى أى من هذه الحالات الأربعة، فإن مساحة مقطع استطارة النيوترون-بروتون، عند الطاقات المنخفضة، تساوى

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma_0 \qquad (٥٥-١١)$$

بمعلومية طاقة ربط الديوترون نعين قيمة σ_1 ، إلا أنها لاتمدنا بأية معلومات عن قيمة σ_0 ، وبذلك يكون قد تم تحليل التباين الظاهرى الوارد بالبند السابق.

أدت التجارب التى استخدم فيها حزم من البروتونات بطاقات أكبر إلى نتائج أكثر أهمية، وسوف نستعرض ذلك فى البند القادم.

١١-٤ عرض للتطورات الإضافية

حتى الآن لم تحل بعد مسألة تعيين طاقة وضع تفاعل النيوكلون-نيوكلون. فيما سبق درسنا نظرية استطارة البروتون-نيوترون. من الصعوبة بمكان إجراء تجربة مباشرة على هذا الموضوع، حيث لايمكن الحصول على هدف يتكون فقط من النيوترونات. يبدو لنا أن تصادم

البروتون-بروتون من الممكن إجراؤه تجريبيا، حيث نستطيع عمليا تعجيل البروتونات وإسقاطها على هدف مكون من الهيدروجين السائل. عند الطاقات المنخفضة للحزمة الساقطة تندفع البروتونات مبتعدة عن بعضها البعض (نتيجة للتنافر الكولومى بين البروتونات الساقطة وبروتونات الهدف) قبل أن تتقارب بمسافة كافية لبدء تأثير التفاعل النووى قصير المدى، وتجربة رذرفورد خير شاهد على ذلك. فى مثل هذه الأحوال يتحكم فى سير التصادمات التأثيرات الكهربية المعروفة ولانستطيع التوصل إلى معلومات مباشرة عن التفاعل النووى. لذلك دعت الضرورة أن يكون المتطلب التجريبى الأول هو أن يصاحب البروتونات الساقطة طاقات عالية لدرجة تستطيع بها أن تنفذ إلى منطقة التفاعل النووى.

بزيادة طاقة البروتونات الساقطة لم يلاحظ تجريبيا أى ظاهرة ملفتة للانتباه، إلى أن وصلنا إلى طاقة مساوية للمقدار 300 MeV (مقاسة فى محاور إسناد المعمل- أى تكافىء طبقا للمعادلة (١٠-٦٣) 150 MeV فى نظام مركز الكتلة). عند هذه الطاقة يحدث تغيرا وصفيا للتفاعل ، فبدلا من ظهور البروتونات بعد التفاعل، مثل زوج من كرات البلياردو، محافظة على قانون حفظ طاقة الحركة فإنها تظهر بعد التصادم بطيئة تماما ويصاحبها جسيم ثالث وهو الميزون- π^0.

تعد هذه النتيجة مثالا مباشرا على قانون حفظ الطاقة، المطابق لما تم تعديله بواسطة النظرية النسبية بوجوب إضافة طاقة السكون للجسيمات فى معادلة اتزان طاقة التصادم. مع العلم أن طاقة الحركة وطاقة السكون يمكن تحويل أى منهما إلى الآخر.

كتلة الميزون- π حوالى $140\ MeV/c^2$، وعليه فطاقة السكون له تساوى 140 MeV . نظرا لأن طاقة الحركة التى تساوى هذا القدر متاحة فى نظام إحداثيات مركز الكتلة فإن هناك إمكانية لتوليد الميزون- π فى تصادم البروتون-بروتون. معظم طاقة الحركة الابتدائية للبروتونين الداخلين فى التفاعل تتحول إلى طاقة سكون للميزون- π.

بالرغم من اكتشاف هذا التفاعل سنة ١٩٤٧ إلا أنه كان متوقعا حدوثه قبل ذلك بسنوات، فى واقع الأمر فقد اقتُرِح هذا التفاعل نظريا سنة ١٩٣٥.

يتفاعل الإلكترون والبروتون فى ذرة الهيدروجين من خلال طاقة الوضع الكولومية. بالتعبير عن نظرية الإشعاع بواسطة ميكانيكا الكم نرى أن الإشعاع يظهر على هيئة فوتونات. حينئذ يمكن وصف التفاعل الكولومى كتبادل للفوتونات بين الجسيمين المشحونين. تتفاعل الجسيمات بالضبط مثل لاعبين للكرة، حيث يقذف أحدهما الكرة للآخر. مثل هذا النوع من التفاعل يظهر طبيعيا عند تراكب ميكانيكا الكم مع النظرية النسبية، وقد اقترح يوكاوا[1] أن التفاعل النووى يجب أن يكون من مثل هذا النوع من التفاعلات. يرتبط مدى هذه التفاعلات بكتلة الجسيم المتبادل. يمكن للاعبى كرة، مثلا، أن يقذفا كرة تنس لمسافة كبيرة ولكن يجب أن يقتربا من بعضهما إذا أرادا تبادل كرة ثقيلة. على ذلك يجب تأسيس مدى التفاعل الذى يصاحبه تبادل جسيم كتلته m (طبقا للنظرية الكمية النسبية) على أساس أبعاد المسافة الحاصلين عليها من m والثوابت الأخرى $c,\hbar$. أى أن

---

(1) Yukawa

$$R = \frac{\hbar}{mc}$$

بأخذ

$$R \cong 1.5 \times 10^{-13} \quad cm$$

بالتوافق مـع المعادلـة (٩-٣٦) فـإن طاقـة السكون للجسيم تحت الدراسـة تساوى

$$mc^2 \cong 130\, MeV$$

طبقا لفكرة يوكاوا فهذه الجسيمات يمكن إنتاجها فـى تصادمـات النيوكلـون-نيوكلون إذا أتيح طاقة كافية فى التفاعل. عملية ظهور الميزونات- π بطاقة سكون تقترب من هذا المقدار تعتبر خير دليل مباشر على نظرية يوكاوا.

إلا أنه بزيادة طاقـة تصـادم البـروتون-بروتـون أكـثر مـن ذلـك يتولـد العديد من الجسيمات النووية-الجزئية[1] المسماة بالجسيمات الأوليـة[2]. كـان من غير المتوقع ظهور هذه الجسيمات تماما. عنـد طاقـات أعلـى مـن الحـد السابق يبدأ ظهور الجسيمات الضديدية المناظرة. تلك الجسيمات تُبدى نفـس علاقة الجسيمات كمـا هـو حـاصل بيـن البوزيترونـات والإلكترونـات. عنـد تصادم الجسيمات الضديدية مع الجسيمات المنـاظرة تختفـى وتتحـول كتلهـا بسرعة إلى جسيمات أخف بالإضافة إلى طاقة حركة.

من المعروف الآن أن العدد الكلى للجسيمات والجسيمات الضديدية قـد تجاوز المائة. نعرض فى الجدول ١١-١ الجسيمات والجسـيمات الضديديـة التى تم الكشف عنها حتى حوالى سنة ١٩٦٠ . من الملاحظ بالجدول أن

---

(1) sub-nuclear particles (2) elementary particles

معظم هذه الجسيمات غير مستقر وتتحلل إلى جسيمات أخرى بمتوسط عمر يتراوح بين 10^{-6} إلى 10^{-10} ثانية. بعض هذه الجسيمات مثل الميونات[1]، μ، والنيوترينات[2]، ν، لاتُنْتَج مباشرة فى تصادمات النيوكلون-نيوكلون ولكن تظهر فقط من نواتج تحلل الجسيمات الأخرى.

تعد فترة عمر الجسيمات الغير مستقرة طويلة طبقا للمقياس النووى للزمن

$$\left(\frac{\hbar}{m_p c^2}\right) \cong 10^{-24}\ sec$$

ولذلك فإن التفاعلات المتسببة فى تحلل هذه الجسيمات الغير مستقرة تكون ضعيفة للغاية. على ذلك يوجد نوعان من التفاعلات النووية قصيرة المدى، وهى

١- ***التفاعلات القوية***: وهى التى تربط النيوكلونات بعضها ببعض وينتج عنها الميزونات- π والجسيمات الأخرى المُنْتَجة فى تصادمات النيوكلون–نيوكلون.

٢- ***التفاعلات الضعيفة***: وهى التى تتسبب فى تحلل تلك الجسيمات.

ينبغى إضافة هذين النوعين من التفاعلات النووية قصيرة المدى إلى النوعين الآخرين (المعروفين للفيزياء الكلاسيكية) من التفاعلات النووية طويلة المدى وهما التفاعل الكهرومغناطيسى الذى وضع أسسه ماكسويل وتفاعل الجذب العام لنيوتن.

---

(1) muons (2) neutrinos

جدول ١١-١ الجسيمات الأولية. الرمز العلوى جهة اليمين يشير إلى الشحنة الكهربية. تظهر الجسيمات فى صورة أزواج من الشحنات المختلفة وتعرف باسم الجسيم والجسيم الضديد. أعطيت الكتل لأقرب $5\ MeV/c^2$. هذا الجدول يلخص الوضع الكائن كما كان معروفا حتى سنة ١٩٦٠. تم مناقشة تطورات حديثة أخرى فى الجزء الرابع من هذا الكتاب.

	الجسيم	نواتج التحلل	متوسط العمر (ثانية)	الكتلة (MeV/c^2)	المغزلية $\hbar$	الجسيم الضديد
الباريونات	Ξ^-	$\Lambda + \pi^-$	10^{-10}	1320	1/2	$\overline{\Xi}^+$
	Ξ^0	$\Lambda + \pi^0$	10^{-10}	1315	1/2	$\overline{\Xi}^0$
	$\Sigma^\pm$	$n + \pi^+, p^+ + \pi^0$	10^{-10}	1190	1/2	$\overline{\Sigma}^\mp$
	Σ^0	$\Lambda + \gamma$	10^{-18}	1190	1/2	$\overline{\Sigma}^0$
	Λ^0	$p^+ + \pi^-$	10^{-10}	1115	1/2	$\overline{\Lambda}^0$
	n	$p^+ + e^- + \overline{\nu}$	10^3	939	1/2	$\overline{n}$
	p^+		مستقر	938	1/2	$\overline{p}^-$
الميزونات	K^+	$2\pi, 3\pi; \mu + \nu$	10^{-8}	495	0	$\overline{K}^-$
	K^0	$2\pi, 3\pi$	10^{-10}	500	0	$\overline{K}^0$
	η^0	$2\gamma, 3\pi$	10^{-16}	560	0	$\overline{\eta}^0$
	π^+	$\mu^+ + \nu$	10^{-8}	140	0	$\overline{\pi}^-$
	π^0	2γ	10^{-16}	135	0	$\overline{\pi}^0$
الفوتون	γ		مستقر	0	1	γ
اللبتونات						
الميون	μ^-	$e^- + \nu + \nu$	10^{-6}	105	1/2	μ^+
الإلكترون	e^-		مستقر	1/2	1/2	e^+
النيوترينو	ν_e		مستقر	0	1/2	$\overline{\nu}_e$
النيوترينو	ν_μ		مستقر	0	1/2	$\overline{\nu}_\mu$

بإدخال الثوابت التى ليس لها أبعاد، مثل ثابت التركيب الدقيق (المعادلة (٨-٦٠))، لتعريف شدة التفاعلات الأربعة الأساسية الموجودة فىالطبيعة نحصل على الجدول ١١-٢.

الجدول ١١-١ والجدول ١١-٢ يصفان المادة الأولية للفيزياء كما نعرفها الآن. فالكون ككل من مادة وإشعاع تأسس من واحد وثلاثين جسيما أوليا مبينة بالجدول ١١-١. كل حدث سواء وصف بوسائل فيزيائية أو كيميائية يكون المتسبب فيه أحد الأنواع الأربعة من التفاعلات المذكورة بالجدول ١١-٢.

إنه حقا تخليق جدير بالاعتبار ومعقد بدرجة أكبر بكثير جدا من توقعاتنا، وهناك الكثير من الأشياء التى لم نبتدىء حتى فى فهمها بعد. فسبحان الله خالق كل شيىء.

جدول ١١-٢ التفاعلات الأساسية فى الطبيعة موضحين شدة ومدى كل تفاعل.

التفاعل	الشدة	مدى طاقة الوضع
كهرومغناطيسى	$e_M^2/\hbar c = 1/137$	∞ (يتبع القانون 1/r)
جذب	$\gamma m_p^2/\hbar c \cong 10^{-36}$	∞ (يتبع القانون 1/r)
قوى (نووى)	$g^2/\hbar c \cong 1$	قصير (~ 10^{-15} m)
ضعيف (نووى)	$f^2/\hbar c \cong 10^{-10}$	قصير (~ 10^{-15} m)

يبدو لنا الآن أن طاقة وضع النيوكلون-نيوكلون هى صورة من صور التفاعلات النووية القوية. تنشأ كل النماذج المعقدة لتحلل الجسيمات، المبينة بالجدول ١١-١، من التفاعلات الضعيفة. لانملك الآن معلومات تفصيلية عن التفاعلات القوية والضعيفة، إلا أنه قد ظهر حديثا بعض التقدم فى

تصنيف الجسيمات التى تتفاعل بقوة، وهذا ماتم عرضه بالباب الخامس عشر.

الجزء الرابع

النظرية العامة والفيزياء النووية - الجزئية

الباب الثانى عشر
المؤثرات ومتجهات الحالة

١٢-١ رموز ديراك

قد بينا لكم بالباب الثالث ضرورة إدخال المؤثرات لتمثيل عمليات القياس أو الملاحظة على الأنظمة الكمية. كما عرضنا هناك الوسيلة لربط عمليات حساب المؤثرات بالملاحظات على الأنظمة الفيزيائية الكمية. وحتى لاتظهر تلك المفاهيم بصورة غامضة قمنا بالتعليق على عدد من النقاط الرياضية الأساسية التى سنعود إليها مرة أخرى الآن. على وجه الخصوص وضحنا بالباب الثالث أن المعنى الفيزيائى لتكامل التطابق، الذى أُدخل كفرض إضافى بالمعادلة (٣-٣٩)، يمكن استنتاجه من الفروض التفسيرية الأخرى المدونة بالبند ٣-٢.

من العوامل التى تساعدنا كثيرا على فهم التركيب الرياضى الجديد للنظرية الكمية هو إدخال الرموز التى وضعها ديراك. اتضح لنا أثناء دراستنا للباب الثامن ضرورة (حتى يتسنى لنا وصف الحركة المغزلية) تعميم النظرية الكمية لتشمل إمكانية إدخال المؤثرات المصفوفة فى الاعتبار لتلعب نفس الدور الذى تقوم به المؤثرات التفاضلية ودوال الحالة. وضعت رموز ديراك حتى يستغل هذا التشابه إلى أقصى مدى (التشابه فى الحكم بين المؤثرات المصفوفة وكل من المؤثرات التفاضلية ودوال الحالة). أدخلت هذه الرموز من قبل بالبابين الثامن والحادى عشر لوصف متجهات الحالة المغزلية. أما الآن فسوف نُهيىء نظرية دوال الحالة فى شكل مشابه.

فيما سبق كتبنا دالة الحالة العامة (أى الدالة الغير مناسبة لأى عملية ملاحظة) فى الصورة $\psi(r)$. باستخدام رموز ديراك تكتب هذه الدالة على النحو

$$\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle \quad (١٢-١)$$

كما ندخل رمز الدالة المركبة المصاحبة لها كالآتى:

$$\psi^*(x) \equiv \langle \psi|x\rangle \quad (١٢-٢)$$

من الأنسب غالبا عدم ذكر الاعتماد الصريح للدالة على x، وعليه نشير إلى الدالة ببساطة بالرمز $\langle\psi|$. باستخدام هذه الرموز الجديدة نرى أنه من دواعى الدقة إطلاق اسم متجه الحالة على $\langle\psi|$ عوضا عن دالة الحالة. متجه الحالة يقوم فى الفراغ بدور مشابه تماما للدور الذى تقوم به متجهات المغزلية التى قدمناها بالبند ٨-٢.

لمتجه المغزلية مركبتان هما $\langle 1|\psi\rangle, \langle 2|\psi\rangle$، انظر المعادلة (٨-١٣). تكتب هاتان المركبتان فى صورة أخرى (انظر المعادلة (٨-٤٥)) وهى $\langle +1/2|\psi\rangle, \langle -1/2|\psi\rangle$. يمكن النظر إلى الرمز $\langle x|\psi\rangle$ بنفس المفهوم السابق، أى أنه المركبة-x لمتجه الحالة $\langle\psi|$. على ذلك يوجد عدد لانهائى من المركبات التى تعين من المتغير x الذى يتغير لتكوين دالة الحالة $\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x)$.

نستطيع الآن كتابة شرط التسوية، المعادلة (٣-٣٢)، كالآتى:

$$\int \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle\, dx = \int |\langle\psi|x\rangle|^2\, dx = 1 \quad (١٢-٣)$$

حيث يجرى التكامل كالمعتاد على المدى الفيزيائى الكامل للقيمة المتغيرة بالمعادلة.

يكتب شرط التسوية بدلالة متجهات الحالة فى الصورة

$$\langle\psi|\psi\rangle=1 \qquad (١٢-٤)$$

إذا كان هناك دالة عامة أخرى

$$\phi(x)=\langle x|\phi\rangle \qquad (١٢-٥)$$

فإن تكامل التطابق بين متجهى الحالة $\langle\phi|,|\psi\rangle$ (الوارد بالمعادلة (٣-٣٩)) هو

$$\int\langle\phi\,|x\rangle\langle x|\psi\,\rangle dx=\langle\phi\,|\psi\,\rangle \qquad (١٢-٦)$$

رموز ديراك تبين لنا بوضوح أن تكامل التطابق هو بالضبط تعميم لعملية الضرب القياسى لمتجهين (لمركبتين)، المعادلة (٨-٢٦)، لتشمل أيضا الحالات المعتمدة على متغيرات مستمرة غير محدودة. بلغة المتجهات نقول أنه إذا كان تكامل التطابق مساويا للصفر، أى أن

$$\langle\phi|\psi\rangle=0 \qquad (١٢-٧)$$

يصبح حينئذ متجها الحالة متعامدين.

من التعاريف (١٢-١)، (١٢-٢)، (١٢-٦) ندرك أن

$$\langle\phi|\psi\rangle=\langle\psi|\phi\rangle^{*} \qquad (١٢-٨)$$

فيما سبق أشرنا إلى دالة الحالة المناسبة لمؤثر $\hat{A}$، والمنتمية إلى القيم المناسبة a_n بالرمز $u_{a_n}(x)$. أما الآن نكتب هذه الدالة فى الشكل

$$u_{a_n}(x)\equiv\langle x|a_n\rangle \qquad (١٢-٩)$$

إذا كان من غير الضرورى الإشارة بوضوح إلى الاعتماد على المتغير x فإن متجه الحالة المناسب يكتب كما يلى:

$$u_{a_n}=|a_n\rangle \qquad (١٢-١٠)$$

وهذا يعتبر مرة أخرى تعميما للرموز المدخلة من قبل للإشارة إلى متجهات الحالة المغزلية المطروحة بالمعادلة (٨-٤٤). كان من الممكن

كتابة $\left|u_{a_n}\right\rangle$ بدلا عن $\left|a_n\right\rangle$ إلا أن شكل القوس فىالتعبير الأخير يدلل على أننا نتعامل مع متجه حالة، كما أن القيمة المناسبة a_n تدل على أن هذا المتجه هو المتجه المناسب، بالإضافة إلى أن الرمز u لايحمل أى معلومات إضافية أخرى وبالتالى من الأنسب إهماله والتعامل مع الصور المختصرة (١٢-٩)، (١٢-١٠).

تكتب معادلة القدر المناسب (٢-٧) طبقا لرموز ديراك كما يلى:

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|a_n\rangle = a_n\langle x|a_n\rangle \qquad (١٢-١١)$$

عند عدم الرغبة فى كتابة الاعتماد على المتغير x صراحة يمكن عندئذ استبدال المعادلة (١٢-١١) بالصورة المختصرة

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \qquad (١٢-١٢)$$

التى تعتبر تعميما للمعادلة (٨-١٦) الخاصة بالمغزلية.

باستخدام الرموز سالفة الذكر لايتسنى لنا بالطبع تبسيط الحسابات الفعلية الخاصة بالقيم والدوال المناسبة المشار إليها فى الأبواب السابقة. ولكن يبدو من المفيد إعادة ذكر بعض النتائج على ضوء هذه اللغة الجديدة. حينئذ تظهر معادلة القدر المناسب للمركبة-z لكمية الحركة الزاوية، المعادلة (٦-٥)، فى الشكل

$$\hat{\ell}_z(\varphi)\langle\varphi|\ell_z\rangle = \ell_z\langle\varphi|\ell_z\rangle \qquad (١٢-١٣)$$

أو فى الصورة المختصرة

$$\hat{\ell}_z|\ell_z\rangle = \ell_z|\ell_z\rangle \qquad (١٢-١٤)$$

أما الدوال المناسبة المسواة، المعادلة (٦-٦)، فتبدو على النحو

$$\langle\varphi|\ell_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\iota\,\ell_z\varphi/\hbar} \quad ; \quad \ell_z = \hbar[0,\pm 1,\pm 2,\ldots] \qquad (١٢-١٥)$$

أما المعادلة المناظرة لكمية الحركة الزاوية ككل، المعادلة (٦-٣١)، هى

$$\hat{\ell}^2(\vartheta,\varphi)\left\langle\vartheta,\varphi\middle|\ell^2,\ell_z\right\rangle=\hbar^2\ell(\ell+1)\left\langle\vartheta,\varphi\middle|\ell^2,\ell_z\right\rangle \qquad (١٦-١٢)$$

حيث

$$\ell=0,1,2,\ldots \qquad (١٧-١٢)$$

كما أن المعادلة (٦-٣٨) تؤول إلى الصورة

$$\left\langle\vartheta,\varphi\middle|\ell^2,\ell_z\right\rangle=\left\langle\vartheta,\varphi\middle|\ell,m\right\rangle=Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \qquad (١٨-١٢)$$

الرمزان ℓ^2,ℓ_z يدللان على أن الحالات المناسبة للمؤثر $\hat{\ell}^2$ تكون متفسخة، أى يمكن اعتبارها حالات مناسبة لكل من $\hat{\ell}^2,\hat{\ell}_z$ فى آن واحد، وأن القيم المناسبة لكلا المؤثرين مطلوبة لتعيين دالة حالة وحيدة.

بنفس الطريقة يمكن كتابة الدوال المناسبة للحالات المتقطعة فى ذرة الهيدروجين، المعادلة (٧-٣٤)، كالآتى:

$$\begin{aligned} u_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi)&=\left\langle r,\vartheta,\varphi\middle|E_n,\ell^2,\ell_z\right\rangle\\ &\equiv\left\langle r,\vartheta,\varphi\middle|n,\ell,m\right\rangle \end{aligned} \qquad (١٩-١٢)$$

بواسطة الرموز الجديدة لديراك نستطيع ببساطة تامة كتابة كل ماقدمناه فى الباب الثالث حتى المعادلة (٣-٧). الميزة فى إجراء ذلك تكمن فى أنه بدلالة متجهات الحالة يمكن تطبيق النتائج بالتساوى على المؤثرات التفاضلية أو المؤثرات المصفوفة. وعلى وجه الخصوص تصبح المعادلة (٣-١)، التى تمثل القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظة $\hat{A}$ على دالة الحالة المسواة $\langle\psi|$، فى الصورة

$$\begin{aligned} \bar{a}_\psi&=\int\langle\psi|x\rangle\hat{A}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\psi\rangle\,dx\\ &\equiv\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \end{aligned} \qquad (٢٠-١٢)$$

١٢-٢ مؤثرات الملاحظة[1]-المسعامدية[2]

حتى هذه اللحظة لم نجرى أى شيىء إضافى أكثر من تغيير الرموز. نقوم الآن، ولأول مرة، بعمل بعض التنقية للنظرية.

واضح أنه للتوافق من الضرورى أن تكون قيمة المعادلة (١٢-٢٠) مجرد عدد حقيقى. هذا يفرض علينا بعض القيود على المؤثرات $\hat{A}$ لتصبح مُمَثِّلة لعمليات الملاحظة (وهذا ماكان يجب افتراضه ضمنا فيما سبق). يظهر جليا أن الشرط الضرورى هو

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^{*} \qquad (١٢-٢١)$$

وذلك لأى حالة $\langle\psi|$.

لأسباب سندركها بعد قليل ندخل الشرط الآتى الأكثر تقيدا:

" لايمثل المؤثر $\hat{A}$ عملية ملاحظة فيزيائية مالم يكن

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle^{*} \qquad (١٢-٢٢)$$

وذلك لأى حالتين $\langle\phi|,\langle\psi|$ "

بكتابة هذا الشرط فى صورته المفصلة نجد

$$\int\langle\phi|x\rangle\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|\psi\rangle dx=[\int\langle\psi|x\rangle\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|\phi\rangle dx]^{*}$$

مثل هذا المؤثر يسمى مؤثر الملاحظة. واضح أن المعادلة (١٢-٢٢) لها التأثير المرغوب فيه لجعل المعادلة (١٢-٢٠) ممثلة لعدد حقيقى. لهذه المعادلة اثنان من المتعلقات الرياضية التى تتميز بمعانى فيزيائية هامة. نوجز هذا فى النظريتين الآتيتين:

نظرية ***ا*** القيم المناسبة لمؤثر ملاحظة تكون حقيقية.

---

(1) observable operators (2) orthonormality

البرهان: إذا كانت a هى أى قيمة مناسبة للمؤثر $\hat{A}$ ، حينئذ يكون

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle ,$$

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|a\rangle = a\langle x|a\rangle \qquad (٢٣-١٢)$$

لهذا بالضرب فى $\langle a|x\rangle$ وإجراء التكامل نجد

$$\int \langle a|x\rangle \hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|a\rangle dx = a\int \langle a|x\rangle\langle x|a\rangle dx \qquad (٢٤-١٢)$$

أو

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = a\langle a|a\rangle$$

بالعودة إلى المعادلة (١٢-٢٢) ندرك أن الطرف الأيسر بالمعادلة السابقة عبارة عن عدد حقيقى. الكمية $\langle a|a\rangle$ ماهى إلا تكامل التسوية (المعادلة (١٢-٣))، وهى الأخرى عبارة عن عدد حقيقى طبقا لتعريف تكامل التسوية. ومن هنا فإن a لابد أن يكون عددا حقيقيا.

يتضح حاجتنا للنتيجة السابقة حتى يتم التوافق الفيزيائى مع الفرض التفسيرى الأول، ت(١)، المذكور بالبند ٣-٢، الذى ينص على أن القيم المناسبة لمؤثر ملاحظة ماهى إلا النتائج الممكنة للملاحظة المناظرة.

نظرية ٢ المتجهات المناسبة المنتمية إلى قيم مناسبة مختلفة لمؤثر ملاحظة تكون متعامدة (أى أن تكامل التطابق لها متلاشى)

البرهان: نفرض أن a_1, a_2 قيمتين مناسبتين مختلفتين للمؤثر $\hat{A}$. إذا

$$\hat{A}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle \qquad (٢٥-١٢)$$

$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle \qquad (٢٦-١٢)$$

وعليه من المعادلة (١٢-٢٥) بالضرب من جهة الشمال فى $\langle a_2|$ نجد

$$\langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle = a_1\langle a_2|a_1\rangle \qquad (٢٧-١٢)$$

بالمثل المعادلة (١٢-٢٦) تعطينا

$$\langle a_1|\hat{A}|a_2\rangle = a_2\langle a_1|a_2\rangle \qquad (١٢-٢٨)$$

باعتبار المعادلة المركبة المصاحبة للمعادلة (١٢-٢٨)، واستخدام المعادلتين (١٢-٢٢)، (١٢-٨) وكذلك النظرية ١، نحصل على

$$\langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle = a_2\langle a_2|a_1\rangle \qquad (١٢-٢٩)$$

بطرح المعادلة (١٢-٢٩) من المعادلة (١٢-٢٧) نجد الآتى:

$$(a_1 - a_2)\langle a_2|a_1\rangle = 0 \qquad (١٢-٣٠)$$

ومنه

$$\langle a_2|a_1\rangle = 0 \qquad (١٢-٣١)$$

أو بطريقة أخرى نقول:

$$\int\langle a_2|x\rangle\langle x|a_1\rangle dx = 0 \qquad (١٢-٣٢)$$

وهذا يكمل البرهان.

من الملاحظ أن البرهان يعتمد على المعادلة (١٢-٢٢). الشرط الأقل قيدا من ذلك، وهو المعادلة (١٢-٢١)، غير كاف للوصول للبرهان المطلوب.

واضح هنا أن الرموز المختصرة قد استخدمت أثناء البرهان. من المفيد للقارىء إعادة الخطوات مرة أخرى مع وضع الاعتماد على المتغير x، وكذلك التكاملات، بشكل صريح.

إذا كانت جميع الحالات المناسبة لمؤثر ما مسواة فيمكن لنا إدماج شرط التسوية مع نتيجة النظرية الثانية لنحصل على شرط المسعامدية (المسعامدية تعنى أن الحالات مسواة ومتعامدة فى نفس الوقت) وهو:

$$\langle a_n|a_{n'}\rangle = \delta_{nn'} \qquad (١٢-٣٣)$$

حيث

$$\delta_{nn'} = 1, \qquad n = n'$$
$$= 0, \qquad n \neq n' \qquad (١٢-٣٤)$$

بدلالة الحالات المناسبة للطاقة فى ذرة الهيدروجين يكتب هذا الشـرط علـى النحو

$$\int u^{*}_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi)\, u_{n'\ell'm'}(r,\vartheta,\varphi)\, r^2\, dr\, d\Omega$$
$$\equiv \int \langle n,\ell,m|r,\vartheta,\varphi\rangle\langle r,\vartheta,\varphi|n',\ell',m'\rangle\, r^2\, dr\, d\Omega$$
$$= \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \qquad (١٢-٣٥)$$

١٢-٣ الدالة-δ لديراك[1]

تعتبر الدالة-δ لديـراك تعميمـا للدالـة $\delta_{nn'}$ لكرونيكر[2] حيـث نسـتبدل المتغيرات المتقطعة n,n' بالمتغيرات المتصلة a,a'، مثلا. من التعريف نجد

$$\delta(a - a') = 0 \quad , \quad a \neq a' \qquad (١٢-٣٦)$$

ولكن

$$\int \delta(a - a')\, da = 1 \qquad (١٢-٣٧)$$

على شرط أن يشمل مدى التكامل النقطة a=a'.

للقيم المناسبة المتصلة يكتب شرط المسعامدية كما يلى:

$$\langle a|a'\rangle = \delta(a - a') \qquad (١٢-٣٨)$$

يبدو أبسط تمثيل للدالة δ على النحو

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\, dx \qquad (١٢-٣٩)$$

لفهم هذا الاختيار نعتبر

(1) the Dirac δ-function (2) Kronecker

$$\phi_g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-g}^{g} e^{iax}\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin ag}{a}$$

والآن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_g(a)\,da = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ag}{a}\,da = 1 \qquad (١٢-٤٠)$$

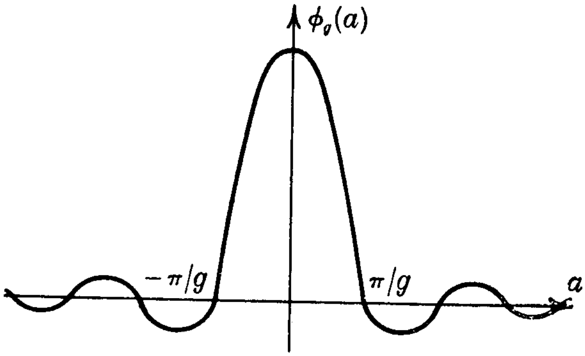
ولكن

$$\phi_g(0) = \frac{g}{\pi}$$

وأيضا

$$\phi_g(\pm\pi/g) = 0$$

وذلك لكى نجعل المساهمة الكلية فى التكامل (١٢-٤٠) عندما $g \to \infty$ تأتى من النقطة $a = 0$ (انظر شكل ١٢-١)، وعندها يصبح الشرطان (١٢-٣٦)، (١٢-٣٧) متحققين. هذا يؤسس فهمنا لاختيار التمثيل (١٢-٣٩).



شكل ١٢-١ رسم الدالة $\phi_g(a)$. عند الحد $g \to \infty$ تصبح القمة عند نقطة الأصل لانهائية الارتفاع وضيقة ولكن تبقى المعادلة (١٢-٤٠) متحققة. لهذا يكون $\phi_{g\to\infty}(a) = \delta(a)$.

إذا تم تسوية موجات دى برولى، للجسيمات التى تسير فى حجم لانهائى حاملة كمية حركة خطية محددة، طبقا للمعادلة (١٢-٣٨) فإننا نحصل على (فى بعد واحد فقط):

$$\langle x | p \rangle = c\, e^{ipx/\hbar}$$

$$\langle p | p' \rangle = \int \langle p | x \rangle \langle x | p' \rangle dx$$

$$= |c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar} dx$$

$$= \delta(p - p') \qquad (١٢-٤١)$$

بمقارنة المعادلة (١٢-٤١) مع المعادلة (١٢-٣٩) نجد أن

$$|c|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \qquad (١٢-٤٢)$$

١٢-٤ التتام[1]

بالإضافة إلى الشرط (١٢-٢٢) نفرض أنه لكى يمثل مؤثر معين عملية ملاحظة لابد للدوال المناسبة، المنتمية لهذا المؤثر، أن تُكَون فيما بينها فئة تامة. للمؤثرات المصفوفة التى أبعادها محدودة فإن الشرط (١٢-٢٢) يعنى أن هذه المؤثرات هرميتية، وأن تتام المتجهات المناسبة يأتى كنظرية. هذا يعنى أن أى حالة فيزيائية $\langle x|\psi \rangle$ يمكن التعبير عنها بالضبط فى صورة مفكوك خطى[2] بدلالة الدوال المناسبة لمؤثر $\hat{A}$، وذلك إن كان المؤثر $\hat{A}$ يعبر عن خاصية ملاحظة على النظام. ومن هنا فإن التتام يعنى إمكانية عمل مفكوك لأى حالة $\langle x|\psi \rangle$ كالآتى:

$$\langle x|\psi \rangle = \sum_m \langle x|a_m \rangle F(a_m) \qquad (١٢-٤٣)$$

---

(1) completeness (2) linear expansion

$$\langle\psi|x\rangle=\sum_{m} F^{*}(a_m)\langle a_m|x\rangle \qquad (١٢-٤٤)$$

حيث $F(a_m)$ هى معاملات المفكوك.

من المعادلة (١٢-٢) نرى أن المعادلة (١٢-٤٤) هى بالضبط الدالة المركبة المصاحبة للدالة (١٢-٤٣). فى الأحوال التى يكون فيها القيم المناسبة a_m متصلة نستبدل المجموع بالتكامل

$$\langle x|\psi\rangle=\int\langle x|a\rangle F(a)\,da \qquad (١٢-٤٥)$$

وعليه، إذا كان $\hat{A}$ هو مؤثر كمية الحركة الخطية، مثلا، فإن أى دالة حالة للنظام يمكن فكها بدلالة الدوال المناسبة لكمية الحركة الخطية

$$\langle x|\psi\rangle=\int\langle x|p\rangle F(p)\,dp$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\int e^{ipx/\hbar}F(p)\,dp \qquad (١٢-٤٦)$$

حيث

$$\langle x|p\rangle=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{ipx/\hbar} \qquad (١٢-٤٧)$$

هى الدالة المناسبة للمؤثر $\hat{p}$ والمنتمية إلى القيم المناسبة p. تم تسوية هذه الدالة طبقا للمعادلة (١٢-٤٢).

أما الآن، بالتعويض من المعادلتين (١٢-٤٣)، (١٢-٤) فى المعادلة المعبرة عن متوسط ناتج تكرار عملية القياس، المعادلة (١٢-٢٠)، نحصل على

$$\bar{a}_\psi=\int\Big(\sum_n F^{*}(a_n)\langle a_n|x\rangle\Big)\,\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\Big(\sum_m\langle x|a_m\rangle F(a_m)\Big)\,dx$$

$$=\int\Big(\sum_n F^{*}(a_n)\langle a_n|x\rangle\Big)\Big(\sum_m a_m\langle x|a_m\rangle F(a_m)\Big)\,dx$$

$$=\sum_{n} a_n |F(a_n)|^2 \qquad (١٢-٤٨)$$

حصلنا هنا على التعبير الثانى بالطرف الأيمن باستخدام معادلة القدر المناسب (١٢-١١). أما التعبير النهائى فهو نتيجة لشرط المسعامدية، المعادلة (١٢-٣٣).

من المعادلة (١٢-٤٨) يتضح لنا أن احتمال الحصول على نتيجة معينة a_n من جراء عملية ملاحظة واحدة $\hat{A}$ على نظام فى الحالة $\langle x|\psi\rangle$ يساوى

$$P_\psi(a_n)=|F(a_n)|^2 \qquad (١٢-٤٩)$$

(هذا يشبه تماما ماقدمناه بشأن التوزيع الفراغى المستخدم فى استنتاج المعادلة (٣-٣٨) بالبند ٣-٥).

لإيجاد $F(a_n)$ نضرب المعادلة (١٢-٤٣) فى $\langle a_n|x\rangle$ ثم نجرى التكامل بالطرف الأيمن، مستخدمين شرط المسعامدية (١٢-٢٣)، لنحصل على

$$\int\langle a_n|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx=\int\langle a_n|x\rangle\sum_m\langle x|a_m\rangle F(a_m)\,dx$$
$$=F(a_n)$$

لهذا

$$F(a_n)=\langle a_n|\psi\rangle=\int\langle a_n|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx \qquad (١٢-٥٠)$$

وهذا هو بالضبط تكامل التطابق بين دالة الحالة العامة $\langle x|\psi\rangle$ ودالة الحالة المناسبة $\langle x|a_n\rangle$. هذا يعنى أن مفكوك أى دالة حالة اختيارية، المعادلة (١٢-٤٣)، يصبح

$$\langle x|\psi\rangle=\sum_{a_n}\langle x|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle \qquad (١٢-٥١)$$

حينئذ يكون احتمال الحصول على النتيجة a_n من جراء عمليـة القيـاس $\hat{A}$ على نظام فى الحالة $\langle\psi|$، المعادلة (١٢-٤٩)، يساوى

$$P_\psi(a_n)=|\langle a_n|\psi\rangle|^* \qquad (١٢-٥٢)$$

وهذه هى نفس المعادلة (٣-٣٩) ولكن برموز ديراك.

يجب علينـا ملاحظـة أن هـذا يعد تعميمـا مباشـرا للتفسـير الفيزيـائى النموذجى لدالة الحالة، الذى ينص على أنهـا تعطـى الكثافـة الاحتماليـة فـى الفراغ، المعادلـة (٣-٣٨). تكتـب الكثافـة الاحتماليـة طبقـا لرمـوز ديـراك كالآتى:

$$P_\psi(x)=|\langle x|\psi\rangle|^2$$

شرط التتام محتوى فى المعادلتين (١٢-٤٣)، (١٢-٤٤). يتم تعريـف الشكل التقليدى لشرط التتام الأكثر عمومية كما يلى:

لأى فئة من المتجهات المناسبة $\langle a|$ يبدو هذا الشرط فى الصورة

$$S_a\ldots|a\rangle\langle a|=\hat{1} \qquad (١٢-٥٣)$$

حيث

$$S_a=\sum_{a_n} \qquad ,a=a_n \qquad (\text{a تأخذ قيما متقطعة})$$

$$=\int\ldots da \qquad , \qquad (\text{a تأخذ قيما متصلة})$$

فى كلا الحالين يؤخذ المجموع على كل القيم المتاحة فيزيائيا.

المعادلة (١٢-٥٣) تعنى أن أى تعبير فـى الصـورة $\langle\phi|\psi\rangle$ يمكـن تقسيمه إلى تعبيرين $\langle\phi|\,,|\psi\rangle$، وأن العملية سـالفة الذكـر (أى $S_a\ldots|a\rangle\langle a|$) يمكـن وضعها بين التعبيرين السـابقين دون حدوث أى تغيير فـى النتـائج العدديـة التى نحصل عليها؛ بمعنى أن

$$S_a\langle\phi|a\rangle\langle a|\psi\rangle=\langle\phi|\psi\rangle \qquad (١٢-٥٤)$$

المعادلة (١٢-٥٠) تعتبر مثالا واضحا على هذه الفكرة عند وضع

$$\phi = a_n$$

$$a = x$$

كما أن المعادلة (١٢-٥١) تشير أيضا لهذه الفكرة عند وضع

$$\phi = x$$

هذه الفكرة لها أهمية قصوى، حيث باستخدامها نستطيع اختصار مفكوك أى دالة اختيارية $\langle x|\psi\rangle$، ويتسنى لنا أيضا تقييم الاحتمالات $P_\psi(a_n)$ بطريقة تلقائية.

من المؤكد أنه قد مر على القارىء، فى مواطن أخرى، مفكوكات من نوع المعادلة (١٢-٥١). إذا كان

$$\hat{A} = \hat{p} \tag{١٢-٥٥}$$

فإن مفكوك أى دالة معطاه $\langle x|\psi\rangle$ هو

$$\langle x|\psi\rangle = S_p \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int e^{ipx/\hbar} \langle p|\psi\rangle\, dp \tag{١٢-٥٦}$$

ومعاملات هذا المفكوك هى

$$\langle p|\psi\rangle = S_x \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int e^{-ipx/\hbar} \langle x|\psi\rangle\, dx \tag{١٢-٥٧}$$

واحتمال أن يكون للنظام كمية حركة خطية مقدارها p يساوى

$$P_\psi(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2 \tag{١٢-٥٨}$$

الدالتان $\langle x|\psi\rangle$, $\langle p|\psi\rangle$ التى بهما يتعين التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ الكارتيزى وفراغ كمية الحركة الخطيـة، علـى الترتيب، تعتبر كل

منهما انتقال فورير للأخرى. تم من قبل ،بالبند ٣-٦ عند دراسة مبدأ عدم التحديد، حساب $\langle p|\psi\rangle$ (التى أسميناها هناك $\phi(p)$) عندما كان

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right] \qquad (٥٩-١٢)$$

إذا كان الجسيم محصورا داخل بئر مربع لانهائى ، طاقة وضعه معرفة بالمعادلة (٣-٢١)، يصبح متجه الحالة $\langle x|\psi\rangle$ دالة ما اختيارية فى المنطقة $|x|\leq a$. نستطيع فك هذا المتجه طبقا للمعادلة (١٢-٥١) بدلالة الدوال المناسبة للطاقة المعينة بالمعادلات من (٣-٢٦) حتى (٣-٢٩)؛

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_n \langle x|E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a)^{-1/2}\sin\frac{2n\pi x}{2a}\langle E_{2n}|\psi\rangle + \qquad (٦٠-١٢)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a)^{-1/2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\langle E_{2n+1}|\psi\rangle$$

هذا هو بالضبط مفكوك متسلسلة فورير. عند التعويض فى المعادلة (١٢-٥٠) للحصول على المعاملات $\langle E_n|\psi\rangle$ التى تعين احتمال تواجد الجسيم فى حالات الطاقة المختلفة الممكنة فإننا بذلك نحصل مرة ثانية على المعادلة القياسية التى تعين معاملات متسلسلة فورير. التعبيرات المناظرة فى حالة المهتز التوافقى الخطى تكون عبارة عن مفكوكات فى صورة متعددات حدود هرميت التى سبق ذكرها بعد المعادلة (٥-٢٦).

من المهم جعل المفكوك فى صورة فئة من الحالات المعينة بطريقة وحيدة[1]. لذلك فلحالة اختيارية لإلكترون فى ذرة الهيدروجين تكتب دالة

---

(1) uniquely specified set of states

الحالة هذه فى الصورة $\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle$. يمكن فك هذه الحالة بدلالة الحالات المناسبة للطاقة، إلا أنه يجب علينا وصف القيم المناسبة لكل من المؤثرين $\hat{\ell}_z$ ، $\hat{\ell}^2$ أيضا حتى نعطى فئة معرفة تعريفا جيدا[1] . لهذا من المعادلة (١٢-٥١) واستخدام الرموز المذكورة فى المعادلة (١٢-٣٥) نحصل على

$$\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle=\sum_{n,\ell,m}\langle r,\vartheta,\varphi|n,\ell,m\rangle\langle n,\ell,m|\psi\rangle \qquad (١٢-٦١)$$

حيث يؤخذ المجموع على كل قيم n,ℓ,m المتوافقة مع القيود المذكورة بالبند ٧-٣.

نحصل على احتمال أن يكون للجسيم القيم المناسبة ℓ_z, ℓ^2, E المناظرة للقيم m,ℓ,n، على الترتيب، من مربع القيمة المطلقة للمعامل

$$\begin{aligned}\langle n,\ell,m|\psi\rangle &= S_{r,\vartheta,\varphi}\langle n,\ell,m|r,\vartheta,\varphi\rangle\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle \\ &=\iint u^*_{n,\ell,m}(r,\vartheta,\varphi)\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle r^2\,dr\,d\Omega\end{aligned} \qquad (١٢-٦٢)$$

وهذا عبارة عن عدد (تكامل التطابق) يعتمد على دالة الحالة المعطاة $\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle$ ودالة الحالة المناسبة المعروفة

$$u^*_{n,\ell,m}(r,\vartheta,\varphi)\equiv\langle n,\ell,m|r,\vartheta,\varphi\rangle \qquad (١٢-٦٣)$$

من الممكن دائما لأى دالة حالة لجسيم، يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مركزية اختيارية، إجراء مفكوك للجزء الزاوى من هذه الدالة بدلالة الحالات المناسبة لكمية الحركة الزاوية. أى أن

$$\begin{aligned}\langle r,\vartheta,\varphi|\psi\rangle &=\sum_{\ell,m}\langle\vartheta,\varphi|\ell,m\rangle\langle\ell,m,r|\psi\rangle \\ &=\sum_{\ell,m}Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)\langle\ell,m,r|\psi\rangle\end{aligned} \qquad (١٢-٦٤)$$

وعليه باستخدام المعادلة (١٢-٥٠) تبدو المعاملات فى الصورة

---

(1) well defined set

$$\langle \ell, m, r | \psi \rangle = S_{\vartheta,\varphi} \langle \ell, m | \vartheta, \varphi \rangle \langle r, \vartheta, \varphi | \psi \rangle = \int Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)^* \langle r,\vartheta,\varphi | \psi \rangle d\Omega \qquad (٦٥-١٢)$$

من الملاحظ أن المعادلة السابقة عبارة عن دالة فى r، ونكتبها بالرموز القديمة كما يلى:

$$\langle \ell, m, r | \psi \rangle = \psi_{\ell m}(r) \qquad (٦٦-١٢)$$

تم من قبل، فى البند ١٠-٤، حساب أول حد فى المفكوك (١٢-٦٤) مع المعاملات المعينة بالمعادلة (١٢-٦٥) للحالة الخاصة التى فيها متجه الحالة يعبر عن حزمة من الجسيمات التى كمية حركتها الخطية مساوية p (انظر المعادلة (١٠-٣٠))

$$\langle r,\vartheta,\varphi | \psi \rangle = \langle r,\vartheta,\varphi | p \rangle = e^{\iota p r \cos\vartheta/\hbar} \qquad (٦٧-١٢)$$

١٢-٥ وسائل استخدام المؤثرات

(أ) *المهتز التوافقى*

يمكن استخدام تلك الوسائل مباشرة فى مسألة تعيين مستويات طاقة مهتز توافقى التى درسناها فى الباب الخامس. لعمل ذلك نستخدم فقط معادلة القدر المناسب (١٢-١٢) وعلاقات المبادلة. ليس من الضرورى عند إجراء الحسابات إدخال المؤثرات فى صورتها المفصلة أيا كانت هذه المؤثرات على شكل مصفوفات أو مشتقات. لذلك سيجد القارىء ماسيأتى لاحقا من جبر المؤثرات فى صورته المختصرة.

طبقا للمعادلة (٥-٦) نكتب الهاميلتونى كما يلى:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \qquad (٦٨-١٢)$$

نضع التعويض

$$\hat{a} = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \omega\, \hat{x} + \frac{\iota}{(2m)^{1/2}}\, \hat{p} \qquad (٦٩-١٢)$$

$$\hat{a}^{+} = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \omega\, \hat{x} - \frac{\iota}{(2m)^{1/2}}\, \hat{p} \qquad (٧٠-١٢)$$

ينظر إلى المعادلتين السابقتين على أنهما تعريفان أكثر عمومية للمؤثرات الواردة بالمسألة ٥-٤.

من علاقة المبادلة $[\hat{x}, \hat{p}]$ ، المعادلة (٣-١٣)، نحصل بالتعويض المباشر على

$$\hat{a}\,\hat{a}^{+} = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad (٧١-١٢)$$

$$\hat{a}^{+}\,\hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad (٧٢-١٢)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = \hbar\omega \qquad (٧٣-١٢)$$

ولكن الحالة المناسبة للطاقة E_n هى $|E_n\rangle$ ، ومنه

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \qquad (٧٤-١٢)$$

التى يمكن كتابتها مرة ثانية باستخدام المعادلتين (١٢-٧١)، (١٢-٧٢) إما فى الشكل

$$\hat{a}\,\hat{a}^{+}|E_n\rangle = (E_n + \frac{1}{2}\hbar\omega)|E_n\rangle \qquad (٧٥-١٢)$$

أو الشكل

$$\hat{a}^{+}\hat{a}|E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega)|E_n\rangle \qquad (٦٧-١٢)$$

وهما يناظران مباشرة المعادلتان (٥-١١أ)، (٥-١١ب).

بضرب المعادلة (١٢-٧٥) فى $\hat{a}^{+}$ نجد

$$\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}|E_n\rangle=(E_n+\frac{1}{2}\hbar\omega)\hat{a}^{+}|E_n\rangle \qquad (٧٧-١٢)$$

وعليه إما أن يكون

$$\hat{a}^{+}|E_n\rangle=0 \qquad (٧٨-١٢)$$

أو يكون

$$\hat{a}^{+}|E_n\rangle=|E_{n+1}\rangle \ , \qquad (٧٩-١٢)$$ مثلا

وعليه تكتب المعادلة (١٢-٧٧) على النحو

$$\hat{a}\hat{a}^{+}|E_{n+1}\rangle=[\ (E_n+\frac{1}{2}\hbar\omega)-\frac{1}{2}\hbar\omega\ ]|E_{n+1}\rangle \qquad (٨٠-١٢)$$

وتلك هى المعادلة (١٢-٧٦) للحالة $|E_{n+1}\rangle$ بشرط تحقق المعادلة

$$E_{n+1}=E_n+\hbar\omega \qquad (٨١-١٢)$$

بذلك إذا كان لدينا أى متجه مناسب $|E_n\rangle$ فمن الممكن دائما باستخدام المعادلة (١٢-٧٩) توليد متجه مناسب جديد $|E_{n+1}\rangle$ ينتمى إلى قيمة مناسبة تعطى بالمعادلة (١٢-٨١)، بشرط أن لاتكون E_n هى طاقة أعلى مستوى. إذا كانت E_n هى طاقة أعلى مستوى نطبق حينئذ المعادلة (١٢-٧٨). إلا أن شكل طاقة وضع المهتز التوافقى تدلل على عدم وجود مستوى طاقة أعلى من بقية المستويات الأخرى، وبالتالى نستطيع توليد مستويات طاقة أعلى بصفة دائمة.

بالمثل بضرب المعادلة (١٢-٧٦) فى $\hat{a}$ نجد

$$\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{a}|E_n\rangle=(E_n-\frac{1}{2}\hbar\omega)\hat{a}|E_n\rangle \qquad (٨٢-١٢)$$

والآن إما أن يكون

$$\hat{a}|E_n\rangle=0 \qquad (٨٣-١٢)$$

أو يكون

$$\hat{a}|E_n\rangle = |E_{n-1}\rangle \, , \qquad \text{مثلا} \qquad (٨٤-١٢)$$

للوضع الأخير تكتب المعادلة (١٢-٨٢) كما يلى:

$$\hat{a}\hat{a}^{+}|E_{n-1}\rangle = [\, (E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega) + \frac{1}{2}\hbar\omega \,]|E_{n-1}\rangle \qquad (٨٥-١٢)$$

وهذه هى المعادلة (١٢-٧٥) للحالة $|E_{n-1}\rangle$ بشرط أن يكون

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega \qquad (٨٦-١٢)$$

على ذلك بمعلومية أى متجه مناسب $|E_n\rangle$ من الممكن دائما باستخدام المعادلة (١٢-٨٤) توليد متجه مناسب جديد $|E_{n-1}\rangle$ وذلك إن لم يكن $|E_n\rangle$ هى الحالة الأرضية للنظام، $|E_0\rangle$. إذا كانت $|E_n\rangle$ هى الحالة الأرضية عندها نطبق المعادلة (١٢-٨٣).

بوضع n=0 فى المعادلة (١٢-٧٦) نحصل على العلاقة

$$E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega = 0$$

التى تعطى طاقة الحالة الأرضية للنظام. أما المعادلة (١٢-٨١) فتشير بوجه عام إلى أن طاقة أى مستوى تُعطى بالمعادلة

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \ , \ n = 0,1,2,\ldots \qquad (٨٧-١٢)$$

التى تتفق مع المعادلة (٥-٢٥).

واضح من المعادلتين (١٢-٧٩)، (١٢-٨٤) أن $\hat{a}^{+}, \hat{a}$ هى، على الترتيب، مؤثرات الإفناء والتوليد لطاقة النظام. عمليتى الإفناء والتوليد تتم هنا بوحدات $\hbar\omega$.

(ب) ***كمية الحركة الزاوية***

يمكن لنا استخدام وسائل المؤثرات المتبعة فى حالة المهتز التوافقى لبيان إتاحة تكون القيم الصحيحة وأنصاف القيم الصحيحة لكمية الحركة

الزاوية. تم من قبل استعراض ذلك بصورة تفصيلية فى البند ٨-٣ فى حالة أنصاف القيم الصحيحة. أما فى هذا المقام فنقوم بعرض برهان الحالة العامة. السبيل لهذا هو استخدام التعريف الأكثر عمومية لكمية الحركة الزاوية، وذلك باستبدال المؤثر $\hat{\ell}$ بالمؤثر $\hat{j}$.

نعتبر أن علاقات المبادلة المذكورة بالمعادلة (٨-٣١) هى الخاصية المعرفة لمؤثرات كمية الحركة الزاوية. هذه العلاقات هى

$$\left[\hat{j}_x , \hat{j}_y\right] = i\hbar\, \hat{j}_z \tag{١٢-٨٨}$$

بالإضافة إلى علاقتين أخريين نحصل عليهما من التباديل الدورية للمعاملات x, y, z.

نعرض مؤثرين جديدين كما يلى:

$$\hat{j}_+ \equiv \hat{j}_x + \iota\, \hat{j}_y \tag{١٢-٨٩}$$

$$\hat{j}_- \equiv \hat{j}_x - \iota\, \hat{j}_y \tag{١٢-٩٠}$$

بالتعويض المباشر نجد أن المعادلة (١٢-٨٨) تعطى

$$\left[\hat{j}_z , \hat{j}_+\right] = \hbar\, \hat{j}_+ \tag{١٢-٩١}$$

$$\left[\hat{j}_z , \hat{j}_-\right] = -\hbar\, \hat{j}_- \tag{١٢-٩٢}$$

$$\left[\hat{j}_+ , \hat{j}_-\right] = 2\hbar\, \hat{j}_z \tag{١٢-٩٣}$$

نظرا لأن $\hat{j}^2$ يتبادل مع $\hat{j}_z$ (أى أن $\left[\hat{j}^2, \hat{j}_z\right]=0$) فيتسنى لنا إدخال دالة حالة، $|\beta, m\rangle$، مناسبة لكلا المؤثرين فى آن واحد. لهذا نجد

$$\hat{j}^2|\beta, m\rangle = \hbar^2 \beta|\beta, m\rangle\ , \tag{١٢-٩٤}$$

$$\hat{j}_z|\beta, m\rangle = \hbar\, m|\beta, m\rangle \tag{١٢-٩٥}$$

مسألتنا الآن هى عملية إيجاد القيم الممكنة لكل من β , m المضمرة فى علاقات المبادلة (١٢-٨٨).

لأى قيمة معطاة من قيم كمية الحركة الزاوية β نعلم أن القيم الممكنة للمركبة-z لكمية الحركة الزاوية يجب أن تقع فى مدى مقيد. يُحَدَّد هذا المدى بقيمتين m_{max} ، m_{min} ، مثلا. هذه الملحوظة لها أهميتها فيما سيرد من مفاهيم.

من المعادلة (١٢-٩٥) نجد

$$\hat{j}_+ \hat{j}_z|\beta, m\rangle = \hbar m \hat{j}_+|\beta, m\rangle \qquad (١٢-٩٦)$$

ولكن من المعادلة (١٢-٩١) نحصل على

$$\begin{aligned}\hat{j}_+ \hat{j}_z &\equiv \hat{j}_z \hat{j}_+ - [\hat{j}_z, \hat{j}_+] \\ &= \hat{j}_z \hat{j}_+ - \hbar \hat{j}_+\end{aligned} \qquad (١٢-٩٧)$$

بالتعويض فى المعادلة (١٢-٩٦) نجد

$$\hat{j}_z \hat{j}_+|\beta, m\rangle = \hbar(m+1) \hat{j}_+|\beta, m\rangle \qquad (١٢-٩٨)$$

ولذلك إما أن يكون

$$\hat{j}_+|\beta, m\rangle = 0 \qquad (١٢-٩٩)$$

أو يكون

$$\hat{j}_z|\beta, m\rangle = |\beta, m+1\rangle \text{ ، مثلا} \qquad (١٢-١٠٠)$$

وعليه نعيد كتابة المعادلة (١٢-٩٨) كما يلى:

$$\hat{j}_z|\beta, m+1\rangle = \hbar(m+1)|\beta, m+1\rangle \qquad (١٢-١٠١)$$

بمقارنة المعادلة (١٢-١٠١) مع المعادلة (١٢-٩٥) يتبين لنا أنه لأى حالة مناسبة معطاة $|\beta, m\rangle$ نستطيع باستخدام المعادلة (١٢-١٠٠) توليد حالة مناسبة جديدة $|\beta, m+1\rangle$ منتمية إلى قيمة مناسبة مساوية $m + 1$ (مقاسة بوحدات $\hbar$)، وذلك إن لم يكن $m = m_{max}$ حيث لتلك الوضع نطبق المعادلة (١٢-٩٩). من الملاحظ أن القيم المتاحة للكمية m تتغير بمقادير صحيحة.

بتطبيق نفس المفهوم السابق على $\hat{j}_z$ $\hat{j}_-$ يمكن توضيح أنه إما أن يكون

$$\hat{j}_-|\beta, m\rangle = 0 \qquad (١٠٢-١٢)$$

أو يكون

$$\hat{j}_-|\beta, m\rangle = |\beta, m-1\rangle \qquad (١٠٣-١٢)$$

حيث

$$\hat{j}_z|\beta, m-1\rangle = \hbar(m-1)|\beta, m-1\rangle \qquad (١٠٤-١٢)$$

على ذلك فلأى حالة مناسبة معطاة $|\beta, m\rangle$ نستطيع باستخدام المعادلة (١٢-١٠٣) توليد حالة مناسبة جديدة $|\beta, m-1\rangle$ منتمية إلى القيمة المناسبة $m-1$ وذلك إن لم يكن $m = m_{min}$ حيث لتلك الوضع نطبق المعادلة (١٢-١٠٢).

والآن

$$\begin{aligned} \hat{j}_- \hat{j}_+ &= (\hat{j}_x - \iota \hat{j}_y)(\hat{j}_x + \iota \hat{j}_y) \\ &= \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + i[\hat{j}_x, \hat{j}_y] \\ &= \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 - \hbar \hat{j}_z \end{aligned} \qquad (١٠٥-١٢)$$

بالتأثير بهذا المؤثر على $|\beta, m_{max}\rangle$ نحصل، باستخدام المعادلة (١٢-٩٩)، على

$$(\hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 - \hbar \hat{j}_z)|\beta, m_{max}\rangle = \hat{j}_- \hat{j}_+ |\beta, m_{max}\rangle = 0 \qquad (١٠٦-١٢)$$

ومنه، باستخدام المعادلتين (١٢-٩٤)، (١٢-٩٥)، نجد

$$(\beta - m_{max}^2 - m_{max})|\beta, m_{max}\rangle = 0$$

أو

$$\beta = m_{max}(m_{max}+1) \qquad (١٠٧-١٢)$$

بالمثل

$$\hat{j}_+ \hat{j}_- = \hat{j}^2 - \hat{j}_z^2 + \hbar \hat{j}_z \qquad (١٢-١٠٨)$$

بالتأثير بهذا المؤثر على $|\beta, m_{min}\rangle$ واستخدام المعادلة (١٢-١٠٢) نحصل على

$$\left(\beta - m_{min}^2 + m_{min}\right) = 0 \qquad (١٢-١٠٩)$$

بمساواة التعبيران المعبران عن β فى المعادلتين (١٢-١٠٧)، (١٢-١٠٩) نجد

$$\left(m_{min} + m_{max}\right)\left(m_{min} - m_{max} - 1\right) = 0 \qquad (١٢-١١٠)$$

ولهذا

$$m_{min} = - m_{max} \qquad (١٢-١١١)$$

وعليه فإن القيم المتاحة للمقدار m تقع متماثلة حول نقطة الأصل. وحيث أن النهايتين العظمى والصغرى تختلفان بمقدار عدد صحيح فإننا نجد الآتى:

$$m_{max} - m_{min} = 2j \quad , \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \qquad (١٢-١١٢)$$

ومن هذه المعادلة والمعادلة (١٢-١١١) نحصل على

$$-j \le m \le j \qquad (١٢-١١٣)$$

أى يتاح للكمية m عدد $2j+1$ من القيم.

باستخدام المعادلتان (١٢-١٠٧)، (١٢-١١١) نجد

$$\beta = j(j+1) \quad , \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \qquad (١٢-١١٤)$$

أى أنه باعتبار علاقات المبادلة (١٢-٨٨) كتعاريف لكمية الحركة الزاوية بدلا من المؤثرات المشتقة (٦-٢) وجدنا أن القيم الصحيحة وأنصاف القيم الصحيحة لكمية الحركة الزاوية كلاهما متاح.

١٢-٦ ملخص

(أ) تكتب دالة الحالة العامة فى الصورة

$$\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$$

$$\psi^*(x)=\langle\psi|x\rangle$$

- تجرى عملية التسوية كالآتى:

$$\langle\psi|\psi\rangle\equiv\int\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx=1$$

- تكامل التطابق بين حالتين $\langle x|\psi\rangle$, $\langle x|\phi\rangle$ عبارة عن تعميم للضرب القياسى

$$\langle\phi|\psi\rangle\equiv\int\langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

- لدوال الحالة المتعامدة نجد

$$\langle\phi|\psi\rangle=0$$

(ب) المؤثر $\hat{A}$ يعبر عن عملية ملاحظة عندما يكون

١- الشرط

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle^*$$

متحققا لأى حالتين $\langle x|\psi\rangle$, $\langle x|\phi\rangle$.

٢- دوال الحالات المناسبة تكون فئة تامة (انظر الفقرة د).

- المتجه المناسب المنتمى إلى قيمة مناسبة a_n هو $\langle x|a_n\rangle$، ولذلك نكتب معادلة القدر المناسب فى الصورة

$$\hat{A}(x,\frac{\partial}{\partial x})\langle x|a_n\rangle=a_n\langle x|a_n\rangle$$

أو

$$\hat{A}|a_n\rangle=a_n|a_n\rangle$$

(ج) دوال الحالات المناسبة تحقق شرط المسعامدية

$$\langle a_n|a_m\rangle=\int\langle a_n|x\rangle\langle x|a_m\rangle dx=\delta(a_n,a_m)$$

حيث الرمز δ يشير إلى $\delta_{a_n a_m}$ أو $\delta(a_n - a_m)$ للمتغير a المتقطع أو المتصل، على الترتيب.

(د) تحقق دوال الحالات المناسبة أيضا شرط التتام

$$S_a \cdots |a\rangle\langle a| = \hat{1}$$

(راجع المناقشة التى تلى المعادلة (١٢-٥٣)).

(ه) خواص دوال الحالات المناسبة سالفة الذكر تؤدى إلى إمكانية فك دوال الحالة الاختيارية $\langle x|\psi\rangle$ بدلالة دوال الحالات المناسبة للمؤثر $\hat{A}$

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_{a_n} \langle x|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle$$

حيث معاملات المفكوك هى

$$\langle a_n|\psi\rangle = \int \langle a_n|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$$

- احتمال أن تسفر عملية القياس $\hat{A}$ لمرة واحدة على نظام فى الحالة $|\psi\rangle$ عن النتيجة a_n يساوى

$$P_\psi(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

جميع المؤثرات التى عرضناها فيما سبق لتمثيل عمليات الملاحظة الممكنة $\hat{A}$ تحقق الشروط الواردة بالفقرة ب، كما أن دوال الحالات المناسبة لعمليات الملاحظة هذه تتمتع بالخواص المذكورة سابقا.

من أمثلة أنواع المؤثرات الأخرى التى لاتتمتع بالخواص المذكورة هى مؤثرات الإفناء والتوليد $\left(\frac{\partial}{\partial y} \pm y\right)$ الواردة بالباب الخامس أثناء دراسة المهتز التوافقى. ورد ذكر تلك المؤثرات مرة أخرى فى صورة $\hat{a}^+, \hat{a}$ بالبند ١٢-٥. هذه المؤثرات لاتمثل عمليات يمكن ملاحظتها.

مسائل ١٢

١٢-١ الدوال المناسبة المسواة للحالة الأرضية، E_0، لمهتز توافقى هى

$$\langle x|E_0\rangle = \frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right]$$

إذا كان النظام فى الحالة

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{\sigma^{1/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\right]$$

فما هو احتمال أن يسفر قياس الطاقة عن النتيجة E_0 ؟

(لإجراء التكامل انظر المسألة ٣-٣ بالباب الثالث)

١٢-٢ حِل المسألتين ٣-٤، ٣-٥ بالباب الثالث مستخدما رموز ديراك.

١٢-٣ دالة الحالة المناسبة الغير مسواة للحالة المثارة الأولى لمهتز توافقى هى

$$\langle x|E_1\rangle = x \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right]$$

أوجد دالة الحالة المناسبة المناظرة لها فى فراغ كمية الحركة الخطية، $\langle p|E_1\rangle$.

الباب الثالث عشر

معادلات الحركة

١٣-١ معادلة شرودنجر للحركة[1]

حتى هذه المرحلة لم ندخل أى شيىء فى حساباتنا عـن الزمـن. وعلـى وجه الخصوص لم نذكر كيفية تغير الخواص الملاحظـة، فـى نظـام كمـى، مع مرور الزمن. ربما تعترينا الدهشة بسبب استطاعتنا دراسـة كـل مـاتقدم بدون إدخال معادلة للحركة. كانت وسيلتنا الرئيسـية فيمـا سـبق مـن دراسـة هى معادلة القدر المناسب للطاقة – معادلة شرودنجر – كذلك فقد تعرضنـا لمناقشات عديدة لإيجاد المستويات المتاحة للطاقـة فـى الأنظمـة المختلفـة، وهذا من السهولة بمكان إجراؤه فـى الميكانيكـا الكلاسـيكية. لذلـك وُضعـت التصورات لوصـف حركـة الجسيمات الكميـة تحـت تـأثير طاقـات الوضـع المختلفة (الباب الرابع). كانت تلك التصورات هى الشبيه الكمى للتصورات العامة التى تُفتَرض كلاسيكيا على أساس قانون حفظ الطاقة

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E \text{ (مقدار ثابت)} \qquad (١٣-١)$$

عند عمل ذلك لم نتطلب أى تعميم لمعادلة نيوتن للحركة التى عادة مـاتكتب بدلالة القوة والعجلة. بكتابة معادلة نيوتن للحركة بدلالة الكميـات الفيزيائيـة التى لها أهميتها فى ميكانيكا الكم فإنها تبدو على النحو:

---

(1) the Schrodinger equation of motion

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (٢-١٣)$$

فيما يلى نستعرض الشكل الميكانيكى الكمى لتلك المعادلة.

فى الباب الثالث افترضنا علاقة المبادلة

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \iota\hbar$$

بالتعامل مع المؤثر $\hat{x}$ كمتغير جبرى عادى فإنه يؤول إلى

$$\hat{x} \to x$$

ويُمَثل المؤثر $\hat{p}$ كما يلى:

$$\hat{p} \to -\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

نتوقع الآن التعامل أيضا مع الزمن t كمتغير جبرى عادى. من وجهة نظر الأبعاد نرى أن علاقة الزمن بالطاقة هى تماما كعلاقة المسافة بكمية الحركة الخطية؛ بالمعنى

$[\hbar]$ = [كمية الحركة الخطية] × [المسافة] = [الطاقة] × [الزمن]

وهذا يعنى أن الحدين لهما أبعاد $\hbar$.

على ذلك يكون مقنعا للغاية افتراض أن

$$\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \hat{H} \qquad (٣-١٣)$$

وهذه عبارة عن معادلة مؤثر. هذا المؤثر يؤثر على متجهات الحالة المعتمدة على الزمن $|\Psi(t)\rangle$.

مادمنا نهتم بمتجهات الحالة المعتمدة علىالزمن فإن للمعادلة (٣-١٣) نفس الفحوى الفيزيائى الموجود بالمعادلة المناظرة الحاوية على $\hat{p}$. قدمنا من

قبل شكل آخر يعبر عن التأثير بالمؤثر $\hat{H}(x,p)$ على حالة مُعبر عنها فى صورة المتغيرات الفراغية (الغير حاوية على الزمن).

بتجميع هذه المعلومات نحصل على

$$\boxed{\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x|\Psi(t)\rangle=\hat{H}(x,-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})\langle x|\Psi(t)\rangle} \qquad (١٣-٤)$$

وتلك هى معادلة شرودنجر للحركة.

تعد هذه المعادلة فرضا فيزيائيا جديدا، وسوف نعطيه الرمز ف(٣) امتدادا للرموز الموضوعة فى البند ٣-٣. هذا الفرض مجرد تخمين مبنى على مفاهيم أساسية، وعذرنا فى قبوله أنه يؤدى إلى اقتراحات متوافقة تماما مع النتائج التجريبية.

نعتبر الآن الشكل الذى يبدو عليه حل المعادلة (١٣-٤). نظرا لأن المؤثر الموجود بالطرف الأيسر للمعادلة يعتمد فقط على الزمن، والمؤثر الموجود بالطرف الأيمن يعتمد فقط على x، فهذا يعنى أننا نبحث عن حل له الشكل

$$\langle x|\Psi(t)\rangle=u(x)f(t) \qquad (١٣-٥)$$

بالتعويض من المعادلة (١٣-٥) فى المعادلة (١٣-٤) والقسمة على u(x)f(t)، نجد

$$\frac{\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(t)}{f(t)}=\frac{\hat{H}(x,-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})u(x)}{u(x)} \qquad (١٣-٦)$$

وحيث أن الطرف الأيسر للمعادلة (١٣-٦) يعتمد الآن على t فقط والطرف الأيمن يعتمد فقط على x وأن هذين المتغيرين (x,t) يتغيران بصفة مستقلة عن بعضهما فإن كلا من طرفي المعادلة يجب أن يساوى مقدارا ثابتا. لأسباب ستظهر بعد قليل نشير لهذا الثابت بالرمز E. أى أن

$$\frac{\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}f(t)}{f(t)}=E \tag{١٣-٧}$$

$$\frac{\hat{H}(x,-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})u(x)}{u(x)}=E \tag{١٣-٨}$$

المعادلة (١٣-٨) هى بالضبط معادلة القدر المناسب للطاقة، ولهذا نكتب

$$E=E_n \tag{١٣-٩}$$

$$u(x)=\langle x|E_n\rangle \tag{١٣-١٠}$$

حينئذ يصبح حل المعادلة (١٣-٧) كالآتى:

$$f(t)=e^{-\iota E_n t/\hbar} \tag{١٣-١١}$$

وعليه فإن حل المعادلة (١٣-٤) عند قيمة معينة للطاقة E_n هو

$$\langle x|\Psi(t)\rangle_{E_n}=e^{-\iota E_n t/\hbar}\langle x|E_n\rangle \tag{١٣-١٢}$$

نحصل على الحل العام للمعادلة (١٣-٤) من مجموع الحلول السابقة بمعاملات اختيارية، أى أن

$$\langle x|\Psi(t)\rangle=\sum_n e^{-\iota E_n t/\hbar}\langle x|E_n\rangle F(E_n) \tag{١٣-١٣}$$

نود استخدام هذه المعادلة لتعيين كيفية نمـو أى دالـة حالـة اختياريـة $\langle x|\psi\rangle$ مع مرور الزمن. يجب حينئذ تحقق شرط الحدود عند $t = 0$، وهو

$$\langle x|\Psi(0)\rangle = \langle x|\psi\rangle \qquad (١٤-١٣)$$

بالتعويض من هذا فى المعادلة (١٣-١٣) نحصل على

$$\langle x|\psi\rangle = \sum_n \langle x|E_n\rangle F(E_n) \qquad (١٥-١٣)$$

ولكن هذا هو بـالضبط مفكوك أى دالـة اختياريـة بدلالـة الحـالات المناسـبة للطاقة، وقد تم التعرض لذلك بالبند ١٢-٣. ومن هنا وباسـتخدام المعادلتـان (١٢-٤٣) ، (١٢-٥٠) نجد

$$F(E_n) = \langle E_n|\psi\rangle \qquad (١٦-١٣)$$

أى أن الحل المعتمد على الزمن والمحقق لشرط الحدود (١٣-١٤) هو

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\iota E_n t/\hbar}\langle x|E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle \qquad (١٧-١٣)$$

حيث باستخدام المعادلة (١٢-٥٠) مرة أخرى نحصل على

$$\langle E_n|\psi\rangle = \int \langle E_n|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx \qquad (١٨-١٣)$$

من أبسط الأمثلة على هذا الوضع حالة جسيم حر كمية حركته الخطية محددة. لتلك الحال يكون

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|p\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{\iota px/\hbar} \qquad (١٩-١٣)$$

أما الحل المعتمد على الزمن فهو

$$\langle x|\Psi(t)\rangle_p = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{\iota(px-Et)/\hbar} \qquad (١٣-٢٠)$$

حيث

$$E=\frac{p^2}{2m}.$$

وتلك هى الموجة الكاملة لدى برولى الواردة بالمعادلة (١-١٨)، التى أدخلت لتفسير حيود الإلكترونات.

وضح الآن، ولأول مرة نتيجة لأساليب ميكانيكية كمية عامة، وجود دليل مباشر على صحة معادلة الحركة الافتراضية (١٣-٤).

لتوضيح المعانى المحتواة فى المعادلة (١٣-١٤) نعتبر مرة أخرى حالة جسيم واقع تحت تأثير بئر جهد لانهائى (انظر المعادلة ٣-٤). أوضحنا من قبل إمكانية فك أى دالة حالة عامة عند الزمن t = 0 بدلالة الحالات المناسبة. لتبسيط الحسابات نعتبر أن الحالة الابتدائية عبارة عن تراكب بسيط من الحالات المناسبة. على سبيل المثال نعتبر أن

$$\langle x|\psi\rangle = 2^{-1/2}\left[\langle x|E_1\rangle + \langle x|E_3\rangle\right] \qquad (١٣-٢١)$$

$$= \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2}\left[\cos\frac{\pi x}{2a} + \cos\frac{3\pi x}{2a}\right] \qquad (١٣-٢٢)$$

الحل عند الزمن t هو

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = (2)^{-1/2}\left[\langle x|E_1\rangle e^{-\iota E_1 t/\hbar} + \langle x|E_3\rangle e^{-\iota E_3 t/\hbar}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2}\left[\cos\frac{\pi x}{2a} e^{-\iota E_1 t/\hbar} + \cos\frac{3\pi x}{2a} e^{-\iota E_3 t/\hbar}\right] \qquad (١٣-٢٣)$$

حيث E_n تعين بالمعادلة (٣-٣٠).

احتمال تواجد جسيم عند الزمن t بطاقة E_n يساوى

$$P_{\Psi(t)}(E_n) = \left|\langle E_n | \Psi(t)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\int \langle E_n | x\rangle\langle x | \Psi(t)\rangle\, dx\right|^2$$

$$= \left|\langle \mathrm{E}_n | \psi\rangle\right|^2 \qquad (١٣-٢٤)$$

هذه الاحتمالات لاتتغير مع الزمن.

للحالة تحت الدراسة يكون احتمال تواجد الجسيم، عند أى زمن، فى مستوى الطاقة الأول مساويا لاحتمال تواجده فى مستوى الطاقة الثالث.

التوزيع الاحتمالى للجسيم فى الفراغ هو

$$P_{\Psi(t)}(x) = \left|\langle x | \Psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2a}\left[\cos^2 \frac{\pi x}{2a} + \cos^2 \frac{3\pi x}{2a}\right] +$$
$$+ \frac{1}{a}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi x}{2a}\cos(E_3 - E_1)t/\hbar$$

أى أن التوزيع الفراغى به حد لايعتمد على الزمن. علـى وجـه الخصـوص فإن احتمال تواجد الجسيم عند نقطة الأصل يتذبذب فى المقدار، مـع مـرور الزمن، بين الصفر وقيمة الاحتمال الابتدائية

$$P_{\Psi(t)}(0) = \frac{1}{a}\left(1 + \cos(E_3 - E_1)t/\hbar\right) \qquad (١٣-٢٧)$$

١٣-٢ معادلة الحركة لهيزنبرج[1]

لمعادلة شرودنجر للحركة أهمية كبيرة فى تقديم طرق تقريبية لحساب مساحات مقاطع الاستطارة. لن نوجه اهتمامنا هنا لدراسة ذلك ولكننا سنعتبر علاقة هذه المعادلة بالميكانيكا الكلاسيكية.

معادلة شرودنجر للحركة هى الوسيلة الطبيعية لوصف تغير نظام ميكانيكى كمى مع الزمن. فى هذا التصور يُنظر إلى المؤثرات الممثلة لعمليات الملاحظة على أنها مستقلة عن الزمن. أما متجهات الحالة فهى تعبر عن الأنظمة تحت الملاحظة. وحيث أن هذه المتجهات (الواصفة لحالة الأنظمة) تتغير مع الزمن فكذلك تكون نتائج عمليات الملاحظة. يعطى متوسط نتيجة تكرار الملاحظة $\hat{A}$ (الملاحظات تتم عند زمن t) على سلسلة من الأنظمة كل منها فى الحالة $|\Psi(t)\rangle$ بالمعادلة

$$\bar{a}_{\Psi(t)} = \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle$$

$$= \int \langle \Psi(t) | x \rangle \hat{A}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle x | \Psi(t) \rangle dx \qquad (١٣-٢٨)$$

هذا المتوسط بالطبع دالة فى الزمن.

على الرغم من أن هذا الوصف طبيعى تماما إلا أنه ليس له حد كلاسيكى بسيط، وذلك لأن متجهات الحالة لاتلعب أى دور فى الميكانيكا الكلاسيكية. فضلا عن ذلك، من الوجهة الكلاسيكية لاتُمَيز عمليات الملاحظة عن نتائج الملاحظة وعليه فالمؤثرات الكلاسيكية ماهى إلا

---

(1) the Heisenberg equation of motion

متغيرات جبرية عادية (مثل (p(t) , x(t)). المتغيرات الجبرية هذه هى التـى تُظهر الاعتماد الزمنى للكميات الفيزيائية المختلفة للنظـام. ومـن هنـا يجـب علينـا وضـع المعادلـة (١٣-٢٨) فـى صـورة تتمتـع بـالكثير مـن مغـزى الوصف الكلاسيكى. يمكن عمل ذلك ببساطة تامة، وعلى وجـه الخصـوص عند استخدام رموز ديراك التـى بواسـطتها نسـتبعد أى معلومـات غـير جوهرية من المعادلات.

تبدو معادلـة شـرودنجر للحركـة (١٣-٤) بدلالـة متجهات الحالـة فـى الصورة

$$\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \qquad (١٣-٢٩)$$

وحلها هو (باستخدام شرط الحدود (١٣-١٤):

$$|\Psi(t)\rangle = e^{\iota\hat{H}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle = e^{-\iota\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle \qquad (١٣-٣٠)$$

معنى ذلك بدلالة دوال الحالة أن

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \exp\left[-\iota\hat{H}(x,-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})t/\hbar\right]\langle x|\psi\rangle$$
$$= \exp\left[-\iota\hat{H}t/\hbar\right]\sum_n\langle x|E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle$$
$$= \sum_n \exp\left[-\iota E_n t/\hbar\right]\langle x|E_n\rangle\langle E_n|\psi\rangle$$

وهذا هو استنتاج آخر للمعادلة (١٣-١٧).

بناء على ذلك نعيد كتابة المعادلة (١٣-٢٨) كما يلى:

$$\bar{a}_{\Psi(t)} = \langle\psi|e^{+\iota\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-\iota\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle \qquad (١٣-٣١)$$

عند تعريف المؤثر المعتمد على الزمن بالمعادلة

$$\hat{A}(t) = e^{+\iota \hat{H} t/\hbar} \hat{A} e^{-\iota \hat{H} t/\hbar} \qquad (١٣-٣٢)$$

حينئذ تصبح القيمة المتوسطة لنتيجة تكرار التأثير بهذا المؤثر (على الحالة المعينة $|\psi\rangle$ عند $t = 0$) مساوية

$$\overline{a(t)_\psi} = \langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle \qquad (١٣-٣٣)$$

المعادلة (١٣-٣٣) متماثلة حقا مع المعادلة (١٣-٢٨). كل مافعلناه هنا هو تغيير الرمز بالطرف الأيمن ليصبح

$$\bar{a}_{\Psi(t)} = \overline{a(t)_\psi} \qquad (١٣-٣٤)$$

إلا أن التصور الآن يختلف كلية عن سابقه.

المؤثر $\hat{A}(t)$ يمثل عملية ملاحظة عند الزمن t على حالة معينة عند الزمن $t = 0$. هذا قريب الشبه جدا من الوصف الكلاسيكى، ويتسنى لنا الآن توقع الارتباط القريب الشبه بين المؤثرات المعتمدة على الزمن، $\hat{A}(t)$ ، والمتغيرات الجبرية الكلاسيكية المناظرة المعتمدة على الزمن.

بتفاضل المعادلة (١٣-٣٢) مع تذكر إبقاء المؤثرات الغير متبادلة فى مواضعها الصحيحة، نجد

$$\iota\hbar\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = -\hat{H} e^{\iota\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-\iota\hat{H}t/\hbar} + e^{\iota\hat{H}t/\hbar}\hat{A}e^{-\iota\hat{H}t/\hbar}\hat{H}$$
$$= -\hat{H}\hat{A}(t) + \hat{A}(t)\hat{H}$$

(مع ملاحظة أن

$$\hat{H}(t) = e^{\iota\hat{H}t/\hbar}\hat{H}e^{-\iota\hat{H}t/\hbar} = \hat{H}$$

هذا يعنى أن مؤثر الطاقة المعتمد على الزمن لايعتمد فى الحقيقة على t) وتلك هى معادلة هيزنبرج للحركة التى تكتب فى صورتها المختصرة كالآتى:

$$\iota\hbar\frac{d\hat{A}(t)}{dt}=\left[\hat{A}(t),\hat{H}\right] \qquad (١٣-٣٥)$$

المعنى الفيزيائى لهذه المعادلة متماثل مع معادلة شرودنجر للحركة (١٣-٤).

بتطبيق المعادلة (١٣-٣٥) عندما يكون

$$\hat{A}(t)=\hat{x}(t) \qquad (١٣-٣٦)$$

على جسيم يتحرك فى بعد واحد تحت تأثير طاقة وضع معينة

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x})$$

نجد أن

$$\iota\hbar\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=\left[\hat{x}(t),\hat{H}(t)\right] \qquad (١٣-٣٧)$$

من السهل التحقق، باستخدام التعريف (١٣-٣٢)، من أن علاقات المبادلة بين المؤثرات المعتمدة على الزمن (مؤثرات هيزنبرج) تأخذ نفس صورة العلاقات المناظرة بين المؤثرات المستقلة عن الزمن (مؤثرات شرودنجر).

وعلى ذلك

$$\iota\hbar\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=\frac{1}{2m}\left[\hat{x}(t),\hat{p}^2(t)\right] \qquad (١٣-٣٨)$$

ولكن

$$\left[\hat{x},\hat{p}^2\right]=\hat{x}\,\hat{p}^2-\hat{p}^2\,\hat{x}$$
$$=\left[\hat{x},\hat{p}\right]\hat{p}+\hat{p}\left[\hat{x},\hat{p}\right]$$
$$=2\iota\hbar\,\hat{p} \qquad (\text{١٣-٣٩})$$

ولهذا

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=\frac{\hat{p}(t)}{m} \qquad (\text{١٣-٤٠})$$

بالمثل إذا كان

$$\hat{A}(t)=\hat{p}(t) \qquad (\text{١٣-٤١})$$

فإن

$$\iota\hbar\frac{d\hat{p}(t)}{dt}=\left[\hat{p}(t),\hat{H}\right]$$
$$=\left[\hat{p},V(\hat{x})\right]$$
$$=-\iota\hbar\frac{\partial V(\hat{x})}{\partial\hat{x}} \qquad (\text{١٣-٤٢})$$

للحصول على المتساوية الأخيرة استخدمنا نتيجة المسألة ٣-٢ بالباب الثالث. مما سبق نجد

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt}=-\frac{\partial V(\hat{x})}{\partial\hat{x}} \qquad (\text{١٣-٤٣})$$

يمكن لنا بسهولة تعميم هذه المعادلات فى الثلاث أبعاد.

والآن فإن المعادلة (١٣-٤٠) متماثلة مع العلاقة الكلاسيكية بين كمية الحركة الخطية والسرعة (معدل تغير الموضع). تعد المعادلة (١٣-٤٣) تعميما مباشرا لمؤثرات القانون الثانى لنيوتن، المعادلة (١٣-٢). هذا

يوضح لنا أن معادلة الحركة الكمية (١٣-٤)- أو بالتكافؤ المعادلة (١٣-٣٥)- تؤدى إلى أن المؤثرات المعتمدة على الزمن والمعرفة بالمعادلة (١٣-٣٢) تحقق بالضبط نفس العلاقات التى تحققها المتغيرات الجبرية الكلاسيكية المناظرة. من ناحية أخرى يمكن ضرب المعادلة (١٣-٤٠) من جهة اليسار فى $\langle \psi | x \rangle$ وإجراء التكامل على x لنحصل على القيمة المتوسطة لتكرار الملاحظة الحادثة عند زمن t على نظام فى حالة اختيارية $|\psi\rangle$ عند الزمن $t = 0$. ومن ثم نحصل على

$$\frac{d}{dt}\overline{x(t)_{\psi}} = \frac{\overline{p(t)_{\psi}}}{m} \qquad (١٣-٤٤)$$

بالمثل من المعادلة (١٣-٤٣) نجد

$$\frac{d}{dt}\overline{p(t)_{\psi}} = -\frac{\overline{\partial V(x)_{\psi}}}{\partial x} \qquad (١٣-٤٥)$$

وهذا يُظهر لنا أن هذه القيم المتوسطة تحقق معادلات الحركة الكلاسيكية.

توصلنا الآن بالكامل إلى النص العام لمبدأ التناظر، ألا وهو "عند الحد الكلاسيكى تتحول ميكانيكا الكم إلى الميكانيكا الكلاسيكية أو بمعنى آخر إلى ميكانيكا نيوتن".

١٣-٣ ثوابت الحركة-الندية[1]

ليس لمعادلة الحركة لهيزنبرج، المعادلة (١٣-٣٥)، الكثير من الأهمية الواقعية فى مسائل معينة من ميكانيكا الكم، وذلك يرجع لكونها تشير إلى

---

(1) constants of motion-parity

المؤثرات. هذا يؤدى بدوره، لأى حالة $|\psi\rangle$ إلى الاعتماد على كل القيم المتوقعة للمؤثر. ومع ذلك فإن هذه المعادلة تقودنا إلى استنتاجات بسيطة وهامة تتعلق بأى عملية ملاحظة $\hat{F}(t)$ متبادلة مع $\hat{H}$، مثل عمليتى الملاحظة $\hat{j}_z, \hat{j}^2$ ،

$$\left[\hat{F}(t),\hat{H}\right]=0 \qquad (١٣-٤٦)$$

حينئذ من المعادلة (١٣-٣٥) نجد

$$\frac{d\hat{F}(t)}{dt}=0 \qquad (١٣-٤٧)$$

بأخذ القيمة المتوسطة عندما يكون النظام فى أى حالة اختيارية، نحصل على

$$\frac{d}{dt}\overline{\hat{F}(t)}_{\psi}=\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\hat{F}|\Psi(t)\rangle=0 \qquad (١٣-٤٨)$$

وهذا دليل على عدم تغير القيمة المتوسطة مع الزمن. إذا كان النظام عند الزمن $t = 0$ فى الحالة المناسبة للمؤثر $\hat{F}$ فإن هذه الحالة تبقى حالة مناسبة لهذا المؤثر عند أى زمن لاحق، وذلك لأن المؤثر لايتغير مع الزمن.

تسمى المؤثرات $\hat{F}(t)$ التى تحقق المعادلة (١٣-٤٦) بثوابت الحركة. هذا بمثابة تعميم للكميات التى تبقى محفوظة[1] فى الميكانيكا الكلاسيكية. لجسيم حر أو لأى نظام مغلق ينظر إلى مؤثر كمية الحركة الكلية على أنه من ثوابت الحركة. كما ذكرنا بالباب الثامن ، لجسيم حر

---

(1) conserved

يسير تحت تأثير طاقة وضع مركزية نجد أن كمية الحركة الزاوية الكلية ومركباتها، كل على حده، متبادلة مع الهاميلتونى. طبقا للمفهوم السابق تصبح أيضا هذه الكميات من ثوابت الحركة. (يجب أن تأخذ المؤثرات $\hat{j}^2, \hat{j}_z$ قيما محددة ثابتة، وعندها تأخذ $\hat{j}_x, \hat{j}_y$ قيما متوسطة ثابتة فقط.)

مانود عمله الآن هو إدخال ثوابت حركة لبعض الخواص التى يمكن ملاحظتها فى نظام ميكانيكى كمى والتى ليس لها مثيل فى الميكانيكا الكلاسيكية.

نعتبر نظاما الهاميلتونى له لايتغير من جراء عملية انعكاس الإحداثيات، أى أن

$$\hat{H}(\bar{r}) = \hat{H}(-\bar{r}) \qquad (١٣-٤٩)$$

ندخل مؤثر الانعكاس $\hat{P}$ الذى من التعريف يتمتع بالخاصية

$$\hat{P}\langle r|\psi\rangle = \langle -r|\psi\rangle \qquad (١٣-٥٠)$$

لذلك فإن ناتج تأثير $\hat{P}$ على أى حالة هو تحويلها إلى الحالة المناظرة فى النظام الإحداثى المنعكس. لأول وهلة يبدو لنا أن هذا المؤثر يشبه بعض الشيىء مؤثرات الإفناء والتوليد المقدمة عند نهاية الباب الخامس. إلا أن هذا المؤثر، على عكس مؤثرات الإفناء والتوليد، له قيم مناسبة حقيقية مساوية ±١. هذه القيم المناسبة تنتمى إلى دوال الحالة التى تصبح فردية أو زوجية من جراء عملية الانعكاس. طبقا للبند ٤-٢ يمكن التعبير عن الدوال المناسبة للمؤثر $\hat{H}$ بدلالة حالات تتمتع بخواص انعكاس محددة (أى فردية أو زوجية). نظرا لأن تلك الحالات تُكَوِّن فئة تامة فمن الممكن عمل فئة تامة ووحيدة التعريف من الحالات التى كل منها حالة مناسبة للمؤثر $\hat{P}$.

على ذلك فإن المؤثر $\hat{P}$ يحقق كل متطلبات الباب الثانى عشر لجعله مؤثـرا يعبر عن كمية قابلة للملاحظة. القيم المناسبة لهذا المؤثـر، ±١، مـاهى إلا ندية الحالة. يتسنى لنا النظر إلى هذا المؤثر على أنه عملية ملاحظة الندية.

والآن لأى حالة $\langle\psi|$ نجد

$$\hat{P}\,\hat{H}(r)\langle\bar{r}|\psi\rangle = \hat{H}(-r)\langle -r|\psi\rangle$$
$$= \hat{H}(r)\,\hat{P}\langle r|\psi\rangle$$

حيـث اسـتخدمنا هنـا المعادلـة (١٣-٤٩). لهـذا فإننـا نحصـل علـى معادلـة المؤثر

$$\hat{P}\,\hat{H}(r) = \hat{H}(r)\,\hat{P} \qquad (١٣-٥١)$$

ولكن هذا هو بالضبط الشرط الذى يجعل (استخدم المعادلة (١٣-٣٥))

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = 0 \qquad (١٣-٥٢)$$

ليصبح $\hat{P}$ من ثوابت الحركة.

خلال نمو أى حالة مع الزمـن تبقـى صفـة النديـة بـدون تغيير علـى شـرط تحقق المعادلة (١٣-٤٩) فقـط. وهـو نـوع جديـد مـن قوانيـن الحفظ الـذى يلعب دورا هاما فى ميكانيكا الكم وليس له شبيه فى الميكانيكا الكلاسيكية.

تُحقق ثلاثة مـن الأربـع تفـاعلات الأساسية بـالجدول ١١-٢ المعادلـة (١٣-٥١). أما التفاعلات النووية الضعيفة كتحلل-بيتا، مثلا،

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

تتغير بالانعكاس وعليه تصبح الندية غير محفوظة. نفهم من ذلك أن هذا التفاعل يبدو مختلفا اختلافا جوهريا عند النظر إليه من خلال نظام إحداثى منعكس- أو من خلال مرآة. تستمد الصورة الكلاسيكية لهذه الفكرة من خلال المقارنة بين قذيفتى مدفع وبندقية. تخرج قذيفة المدفع بعيدا بدون حركة مغزلية ويكون لها نفس الشكل عند استخدام نظام إحداثى منعكس (أى بالتكافؤ عند النظر إليها من خلال مرآة). أما قذيفة البندقية فيصاحبها حركة مغزلية فى اتجاه معين، وليكن مثلا فى اتجاه عقارب الساعة حول خط مسار القذيفة. عند النظر فى مرآة موضوعة على امتداد خط المسار سوف تبدو الحركة المغزلية المصاحبة لقذيفة البندقية فى اتجاه عكس عقارب الساعة، وهذا وضع مميز تماما عن الآخر. بنفس المفهوم فإنه فى تحلل-بيتا من النيوترون تخرج دائما $\bar{\nu}$ بمغزلية فى اتجاه عقارب الساعة حول مسارها، والنيوترون الذى ينظر إليه فى تحلله كمدفع للنيوترينات فإنه يتصرف بطريقة مشابهة لقذيفة البندقية- وليس المدفع.

١٣-٤ قوانين الحفظ وعدم التغير[1]

لأى مؤثر معطى $\hat{F}$ نستطيع تعريف المؤثر المصاحب الهرميتى[2] $\hat{F}^+$ وذلك باستلزام أن القيم المتوقعة لأى حالات $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ تحقق الشرط

$$\langle\phi|\hat{F}^+|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{F}|\phi\rangle^* \qquad (١٣-٥٣)$$

إذا كان $\hat{F}$ على شكل مصفوفة فإننا نكتب الشرط على عناصرها كما يلى:

---

(1) conservation laws and invariance (2) Hermitian conjugate operator

$$\langle i|\hat{F}^{+}|j\rangle = \langle j|\hat{F}|i\rangle^{*} \qquad (١٣-٥٤)$$

باستخدام هذا التعريف يكتب الشرط (١٢-٢٢) الخاص بأى مؤثر يمثل عملية ملاحظة على النحو

$$\hat{F} = \hat{F}^{+} \qquad (١٣-٥٥)$$

يطلق على هذا المؤثر، عندما يتحقق فيه هذا الشرط، اسم مؤثر هرميتى.

إذا حقق مؤثر $\hat{U}$ الشرط

$$\hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{1} \qquad (١٣-٥٦)$$

يطلق عليه أنه وَحْدِى[1]. هذا الشرط يطبق على المؤثرات، تفاضلية كانت أم مصفوفة. إذا كان المؤثر $\hat{U}$ على شكل مصفوفة يصبح حاصل ضرب كل من $\hat{U}$، $\hat{U}^{+}$ على نفس المنوال كما عرفناه فى المعادلة (٨-٢١).

بمعلومية أى مؤثر هرميتى $\hat{F}$ يمكن تكوين المؤثر

$$\hat{U} = \exp\left[\iota\,\varepsilon\,\hat{F}\right]$$

$$\equiv \hat{1} + \frac{\left(\iota\,\varepsilon\,\hat{F}\right)}{1!} + \frac{\left(\iota\,\varepsilon\,\hat{F}\right)^{2}}{2!} + \dots \qquad (١٣-٥٧)$$

حيث ε عدد حقيقى. ولأن

$$\hat{U}^{+} = \exp\left[-\iota\,\varepsilon\,\hat{F}^{+}\right] = \exp\left[-\iota\,\varepsilon\,\hat{F}\right] \qquad (١٣-٥٨)$$

فإننا نجد أن

---

(1) unitary

$$\hat{U}\hat{U}^{+} = \exp\left[\iota\varepsilon\hat{F}\right]\exp\left[-\iota\varepsilon\hat{F}\right] = \hat{1} \qquad (٥٩-١٣)$$

وعليه يكون المؤثر $\hat{U}$ وحدى كما سبق لنا توقع ذلك بالرموز من قبل. إذا كان مقدار ε صغيرا للغاية فإننا نحتاج فقط إلى الأخذ فى الاعتبار لأول حدين فى المفكوك (١٣-٥٧) ليصبح المؤثر الوحدى المتناهى فى الصغر له الشكل

$$\hat{U} = \hat{1} + \iota\varepsilon\hat{F}\ , \quad \hat{U}^{+} = \hat{1} - \iota\varepsilon\hat{F} \qquad (٦٠-١٣)$$

بهذه الطريقة نستطيع ربط المؤثر الوحدى بأى مؤثر هرميتى، والعكس صحيح. ذكرنا فيما سبق أن التفسير الفيزيائى للمؤثر الهرميتى هو أنه يعبر عن كميات فيزيائية قابلة للملاحظة. أما الآن فنقدم التفسير الفيزيائى للمؤثرات الوحدية.

نفرض الحالة $\langle\psi|$ والتأثير عليها بالمؤثر الوحدى $\hat{U}$ لتكوين حالة جديدة

$$|\psi^{u}\rangle \equiv \hat{U}|\psi\rangle \qquad (٦١-١٣)$$

التى مركباتها

$$\langle x|\psi^{u}\rangle \equiv \langle x|\hat{U}|\psi\rangle$$

حينئذ من التعريفين (١٢-٢)، (١٣-٥٢) نجد

$$\langle\psi^{u}|x\rangle = \langle x|\psi\rangle^{*} = \langle x|\hat{U}|\psi\rangle^{*} = \langle\psi|\hat{U}^{+}|x\rangle \qquad (٦٢-١٣)$$

ليصبح

$$\langle\psi^{u}| = \langle\psi|\hat{U}^{+} \qquad (٦٣-١٣)$$

ولذلك إذا كانت $|\psi\rangle$ مسواة فإننا نحصل على

$$\langle\psi^{u}|\psi^{u}\rangle = \langle\psi|\hat{U}^{+}\hat{U}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \qquad (١٣-٦٤)$$

وتكون $|\psi^{u}\rangle$ مسواة هى الأخرى.

بنفس المفاهيم نقول إذا كان $|a_n\rangle$ فئة تامة من الحالات المناسبة المتعامدة (انظر البند ١٢-٦)، فحينئذ يكون أيضا

$$\hat{U}|a_n\rangle \equiv |a_n^{u}\rangle \qquad (١٣-٦٥)$$

فئة تامة متعامدة.

على ذلك فإن المؤثرات الوحدية تمكننا من الانتقال من وصف ما للنظام إلى وصف فيزيائى آخر مكافىء للوصف الأول. فمثلا، إذا كان $|a_n\rangle$ هى الحالات المناسبة لطاقة نظام معين والمعينة طبقا لفئة إحداثيات ما فإنه بالاختيار المناسب للمؤثر $\hat{U}$ فإن $|a_n^{u}\rangle$ يمكن أن تكون الحالات المناسبة لنفس النظام فى محاور إسناد الإحداثيات الجديدة التى نحصل عليها بإزاحة نقطةالأصل (انتقال) أو بتغيير توجيه الإحداثيات (دوران).

بوجه عام إذا كان $\varepsilon\hbar$ هى مقدار الإزاحة لنقطة الأصل (الإحداثى كارتيزى) وكان $\hat{F}$ هو المؤثر الذى يمثل كمية الحركة المناظرة للإحداثى. عندئذ يكون $\hat{U}$ المعرف بالمعادلة (١٣-٥٧) هو المؤثر الوحدى الذى ينقل الحالات القديمة إلى الحالات المناظرة فى الإحداثيات الجديدة. من أبسط الأمثلة على ذلك هو إزاحة الإحداثى x لنظام خطى، مثل المهتز التوافقى الخطى، بمقدار a. فى مثل هذا الوضع يكون $\hat{F}$ هو مؤثر كمية الحركة $\hat{p}$.

أما المؤثر الذى يسبب إزاحة مقدارها a لنقطة أصل الإحداثيات فهو

$$\hat{U}^{a} = \exp[\iota \hat{p} a / \hbar] \qquad (١٣-٦٦)$$

فى تمثيل شرودنجر نعبر عن الحالات الجديدة $\langle \psi^{a}|$ بدلالة الحالات القديمة $\langle \psi|$ كما يلى:

$$\begin{aligned}
\langle x|\psi^{a}\rangle &= \exp\left[\frac{\iota a}{\hbar}(-\iota\hbar\frac{\partial}{\partial x})\right]\langle x|\psi\rangle , \\
&= \left[1+\frac{1}{1!}(a\frac{\partial}{\partial x})+\frac{1}{2!}(a\frac{\partial}{\partial x})^{2}+\ldots\right]\langle x|\psi\rangle \qquad (١٣-٦٧) \\
&= \langle x+a|\psi\rangle
\end{aligned}$$

حصلنا على المتساوية الأخيرة نظرا لأن التعبير قبل الأخير هو بالضبط مفكوك تيلور لدالة الحالة $\langle x+a|\psi\rangle$ بدلالة الحالة الأصلية $\langle x|\psi\rangle$.

نعتبر مؤثر، من النوع العام، $\hat{U}$ متناهى فى الصغر ويمثل عملية انتقال متناهية فى الصغر لإحداثى مستخدم لوصف نظام فيزيائى معين. يطلق على النظام أنه عديم التغير بالنسبة لهذه الانتقالات إذا كانت القيمة المتوقعة للهاميلتونى للحالات $\langle\psi|,\langle\phi|$ لاتتغير من جراء عملية الانتقال؛ أى عندما يكون

$$\langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\phi^{u}|\hat{H}|\psi^{u}\rangle \qquad (١٣-٦٨)$$

ولهذا

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle &= \langle\phi|\hat{U}^{+} H \hat{U}|\psi\rangle , \\
&= \langle\phi|(\hat{1}-\iota\varepsilon\hat{F})\hat{H}(\hat{1}+\iota\varepsilon\hat{F})|\psi\rangle , \qquad (١٣-٦٩) \\
&= \langle\phi|\hat{H}|\psi\rangle - (\iota\varepsilon)\langle\phi|\hat{F}\hat{H}-\hat{H}\hat{F}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

حيث أهملنا فى المتساوية الأخيرة الحد الذى من الرتبة ε^2. نظرا لأن هذا الوضع يتحقق لأى حالة من الحالات $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ فيمكن استبعاد الحالات وكتابة الشرط المفروض على المؤثر الذى يصاحبه صفة عدم التغير كما يلى:

$$\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F} \equiv [\hat{F}, \hat{H}] = 0 \qquad (١٣-٧٠)$$

ولكن هذا هو بالضبط، من المعادلة (١٣-٤٦)، الشرط اللازم لجعل $\hat{F}$ من ثوابت الحركة (أى الشرط اللازم لجعل الكمية $\langle\hat{F}\rangle$ محفوظة). ولكون هذه المفاهيم قابلة للعكس فإننا نجد ارتباط هام بين عدم التغير وقوانين الحفظ ؛

"الشرط الضرورى والكافى لجعل كمية حركة خطية ما محفوظة هو أن يكون الهاميلتونى عديم التغير عند إجراء عمليات الإزاحة للإحداثى المناظر".

من أمثلة ذلك عدم تغير عناصر مصفوفة الهاميلتونى

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

للجسيم الحر عند إجراء عمليات الإزاحة للإحداثى وبقاء كمية الحركة الخطية للنظام محفوظة.

إلا أن عدم التغير هذا لايتحقق فى حالة جسيم يتحرك تحت تأثير طاقة وضع تتغير (تهتز) توافقيا وممركزة عند نقطة ثابتة معينة. وذلك لأن طاقة الوضع تُعَرِّف نقطة الأصل لإحداثى طبيعى. لهذا النظام لاتكون كمية الحركة محفوظة.

فـى حقيقـة الأمـر هـذه النتيجـة ليسـت قـاصرة فقـط علـى إزاحـات الإحداثيـات الفراغيـة-الزمنيـة وكميـات الحركـة الخطيـة المنـاظرة، ولكنهـا تسرى أيضا على أى زوج من الملاحظات المتتامة . سوف نستخدم تعميمـا لهذه الفكرة فى الباب القادم.

١٣-٥ ملخص

أضيف هنا للفرضين الفيزيائيين بالبند ٣-٣ (مبدأ التناظر ومبدأ التتـام) فرض فيزيائى ثالث - هو معادلة الحركة لنظام كمى.

يمكن كتابة هذه المعادلة إما فى صورة شرودنجر

$$\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$$

أو فى صورة هيزنبرج

$$\iota\hbar\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \left[\hat{A}(t), \hat{H}\right]$$

هـذه الصياغـة أكثر ملاءمـة للحسابات الكميـة. ترتبـط صـورة هيزنـبرج ارتباطا قريبا بالنظريـة الكلاسيكية وقد بينـا أنهـا تـؤدى إلـى أن الميكانيكـا الكلاسيكية هى حقا الحد الكلاسيكى ($\hbar=0$) لميكانيكا الكم.

من أعظم التطبيقات أهمية على معادلة هيزنبرج هو تلـك الملاحظـات $\hat{F}(t)$ القابلة للمبادلة مع $\hat{H}$ (أى التى فيها تتحقق المعادلة $\left[\hat{F}(t), \hat{H}\right]=0$). لهذا الحال تعبر المؤثرات عن ملاحظات لاتتغير مع الزمـن، وعليـه تكـون الكميـات الملاحظـة محفوظـة. يمكـن ربـط هـذه الملاحظـات المحفوظـة

(الهرميتية) بالمؤثرات الوحدية، التى تصف عمليات انتقال الإحداثيات مع بقاء الهاميلتونى بدون تغيير- مثل الإزاحات والدورانات. لذلك فإن عدم التغير عند إزاحة الإحداثيات الخطية يرتبط بحفظ كمية الحركة الخطية، وعدم التغير عند الدوران (أى عند إزاحة الإحداثيات الزاوية) يرتبط بحفظ كمية الحركة الزاوية.

مسائل ١٣

١٣-١ وضح أن معادلتى هيزنبرج للمؤثرات $\hat{p}(t), \hat{x}(t)$ لمهتزتوافقى تكون متماثلة فى صياغتها مع معادلات الحركة الكلاسيكية المناظرة.

١٣-٢ فى نظام لجسيمين متماثلين يجب علينا إدخال المؤثر $\hat{P}_{1,2}$ الذى يُحْدِث تبادلا لموضعى الجسيمين 2 , 1 . القيمتان المناسبتان لهذا المؤثر هما 1± المنتميتان إلى الحالة المناسبة المتماثلة والحالة المناسبة المتماثلة ضديديا عند إجراء عملية التبادل. ماهو الشرط الذى يجب وضعه على الهاميلتونى $\hat{H}$ لهذا النظام ليؤكد لنا أن المؤثر $\hat{P}_{1,2}$ من ثوابت الحركة؟

الباب الرابع عشر

القاعدة الذهبية[1]

١٤-١ نظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن[2]

عند دراسة ظاهرة سريان السوائل فى الظروف المستقرة المثالية يتـاح لنا اثنين من الطرق الممكنة التى ننسبها إلى كل من أويـلر[3] ولاجرانـج[4] . فى طريقة أويلر يُنظر إلى النظام ككل فى صورة الكثافة والتيار عند نقـاط ثابتة فى الفراغ. فى هذه الطريقة لايظهر الزمن بوضوح، وذلك لأنه علـى الرغم من سريان السائل فإن التيارات والكثافات عند نقاط ثابتة لاتتغير مـع الزمن فى وضع الاستقرار. من الناحية الأخرى يمكن التركيز على عنصر معين من السائل الفعلى وتتبع حركته فى النظام، وتلك هى رؤيـة لاجرانـج للمسألة. فى طريقـة لاجرانـج نجـد أن الزمـن يلعـب دورا حيويـا حتـى فـى وضع الاستقرار.

تعاملنا فيما سبق مع المسائل الديناميكية فى ميكانيكا الكـم مـن وجهتهـا المستقلة عن الزمن، أى طبقا لرؤية أويلر. لهذا فإن تأثير خطوة الجهد على حزمة من الجسـيمات قد نوقش بـالبند ٤-١ فـى صـورة الحزمتيـن النـافذة والمنعكسة. أما فى البندين ١٠-٣، ١٠-٤ فقد اعتبرنا استطارة حزمة من الجسيمات بواسطة طاقة وضع معينة على أساس نفس وجهة النظر هذه.

تتيح لنا معادلة شرودنجر المعتمـدة علـى الزمـن التعـامل مـع المسـائل الديناميكية لكل من الاستطارة والانحلال بطريقة تقترب كثيرا من معاملة

---

(1) golden rule (2)time dependent perturbation theory (3) Euler
(4) Lagrange

لاجرانج الكلاسيكية. فالنظام يبتدىء بحالة معينة، ومن النمو الزمنى لهذه الحالة (باستخدام معادلة شرودنجر (١٣-٢٩)) يمكن حساب الاحتمال لكل وحدة زمن لتواجد النظام فى حالة أخرى عند أى لحظة زمنية لاحقة . بوجه عام لايمكن الحصول على حل لمثل هذه المسائل، ولكن إذا كان التفاعل المتسبب فى الانتقال من حالة لأخرى صغيرا فمن الممكن الوصول إلى حل تقريبى للمسألة بدلالة قوى تصاعدية[1] لشدة طاقة وضع التفاعل. وهذا مايعرف *بنظرية الاضطراب المعتمدة على الزمن*. نظرا لعمومية هذه النظرية فسوف نقوم باستخدام رموز ديراك العامة فى معالجتها.

لتحديد أفكارنا من المفيد التفكير فى استطارة جسيم بواسطة طاقة وضع ثابتة المقدار (تم دراسة هذه المسألة من قبل بالباب العاشر ولكن طبقا لرؤية أويلر).

نعتبر أى نظام يسمح لنا بتقسيم مؤثر الطاقة الكلية، الهاميلتونى، إلى جزئين

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \qquad (١٤-١)$$

حيث $\hat{H}_0$ ينتمى إليه فئة من الحالات المناسبة التى تُعَرّف النظام الحر والتى يمكن إيجادها بالضبط. حينئذ يكون $\hat{V}$ هو المعبر عن طاقة وضع التفاعل.

فى مسألة الاستطارة البسيطة هذه، حيث

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}) \qquad (١٤-٢)$$

من الواضح فيها أن النظام الحر يُعَرَّف بحد طاقة الحركة

(1) ascending powers

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (١٤-٣)$$

نفرض أن الدوال المناسبة المنتمية للمؤثر $\hat{H}_0$ والتى تعطِى القيم المناسبة E_n عند التأثير عليها بهذا المؤثر هى

$$|E_n, \alpha\rangle \equiv |n\rangle \quad (١٤-٤)$$

حيث الرمز α هو اختصار لجميع المعلومات الإضافية اللازمة لتعيين حالة فريدة.

لجسيم حر يعبر عن هذه الدوال بالمركبتين المستقلتين لمتجه الوحدة المُعَرّف لاتجاه كمية الحركة الخطية. من ناحية أخرى يمكن تعريف حالة النظام بمتجه كمية الحركة الخطية،

$$|n\rangle \equiv |p_n\rangle \quad (١٤-٥)$$

الحالة $\langle n|$ تُكون فئة مسعامدة تامة[1] .

على الرغم من أن هذه الحالات تكون عادة متصلة إلا أننا يمكننا التعامل معها على اعتبار أنها متقطعة، وذلك بغرض تعميم المسألة. لاستيفاء هذه الفكرة نكتب شرط المسعامدية كالآتى:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad (١٤-٦)$$

وعندئذ تكتب الحالات الحرة المعتمدة على الزمن على النحو (انظر المعادلة (١٣-١٣))

$$|n(t)\rangle = |n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar} \quad (١٤-٧)$$

نفترض أن النظام الفيزيائى الفعلى متواجد فى حالة معتمدة على الزمن

$$|\Psi_i(t)\rangle$$

---

(1) complete orthonormal set

والتى يجب أن تحقق معادلة شرودنجر للحركة (١٣-٢٩)،

$$\iota\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_i(t)\rangle=|\hat{H}_0+\hat{V}|\Psi_i(t)\rangle \qquad (١٤-٨)$$

المعامل i يدلل على أنه عند الزمن الابتدائى الذى نعتبره مساويا

$$t=-T/2 \qquad (١٤-٩)$$

يكون النظام فى حالة مناسبة للنظام الحر (انظر المعادلة (١٤-٧))،

$$|\Psi_i(-T/2)\rangle=|i\rangle e^{\iota E_i T/2\hbar} \qquad (١٤-١٠)$$

عند استطارة جسيم نتيجة لطاقة وضع معينة نجد أن الحالة

$$|i\rangle=|p_i\rangle \qquad (١٤-١١)$$

هى التى تُعَرِّف طاقة واتجاه الحزمة الساقطة قبل حدوث الاستطارة.

من الملائم البحث عن حل للمعادلة (١٤-٨) فى صورة مفكوك بدلالة الدوال المناسبة (المعتمدة على الزمن) للنظام الحر،

$$|\Psi_i(t)\rangle=\sum_n|n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar}a_{ni}(t) \qquad (١٤-١٢)$$

عند تلاشى طاقة وضع التفاعل ($\hat{V}=0$) ينبغى لهذا المفكوك أن يكون هو الشكل العام للحل المعتمد على الزمن (المعادلة (١٣-١٣)) الذى معاملاته a_{ni} ثابتة (a_{ni} تناظر $F(E_n)$). إلا أن وجود $\hat{V}$ بالهاميلتونى يستحث ظهور الاعتماد الزمنى فى هذه المعاملات.

من الواضح أن شرط الحدود (١٤-١٠) هو

$$a_{ni}(-T/2)=\delta_{ni} \qquad (١٤-١٣)$$

نعتبر حالة نهائية معينة ونرمز لها بالرمز f . عند استطارة جسيم نتيجة لوجوده تحت تأثير طاقة وضع ما فإن الحالة النهائية تعين بمعلومية كمية حركة نهائية

$$|f\rangle = |p_f\rangle \qquad (١٤-١٤)$$

احتمال أن يتواجد النظام عند الزمن t فى الحالة $\langle f|$ يساوى

$$w(t) = |\langle f|\Psi_i(t)\rangle|^2 = |a_{fi}(t)|^2 \qquad (١٥-١٤)$$

باعتبار فترة زمنية كلية T محسوبة ابتداء من لحظة تهيئة الحالة الابتدائية للنظام، $\langle i|$، نجد أن الاحتمال لكل وحدة زمن لحدوث انتقال للنظام من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية، $\langle f|$، يساوى

$$"w" = \frac{w(T/2)}{T} = \frac{|a_{fi}(T/2)|^2}{T} \qquad (١٦-١٤)$$

على ذلك فإن المعاملات $a_{fi}(t)$ فى المفكوك (١٤-١٢) هى ببساطة معدلات الانتقالات[1] التى نود حسابها. هذه المعاملات معروفة باسم سعات الانتقالات[2] .

لاستنتاج تعبير يعطى هذه السعات نعوض من المعادلة (١٤-١٢) فى المعادلة (١٤-٨)؛

$$\iota\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n |n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar} a_{ni}(t)\right] = \sum_n |\hat{H}_0 + \hat{V}|n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar} a_{ni}(t)$$

(١٧-١٤)

فى الطرف الأيمن لهذه المعادلة ينبغى استخدام حقيقة كون دوال الحالة عبارة عن دوال حالة مناسبة للنظام الحر، أى أن

$$\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad (١٨-١٤)$$

هذا يؤدى إلى ظهور سلسلة من الحدود التى تتلاشى مع حدود الطرف الأيسر الناتجة من إجراء التفاضل الزمنى على المعاملات الأسية. أما الحدود المتبقية فهى:

---

(1) transition rates (2) transition amplitudes

$$\sum_n \iota\hbar|n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar}\frac{d}{dt}a_{ni}(t)=\sum_n \hat{V}|n\rangle e^{-\iota E_n t/\hbar}a_{ni}(t) \qquad (١٤-١٩)$$

والآن بالضرب من جهة اليسار فى $\langle f|$ واستخدام شرط المسعامدية

$$\langle f|n\rangle=\delta_{fn} \qquad (١٤-٢٠)$$

نجد أن هذا يتسبب فى ملاشاة المجموع بالطرف الأيسر ويتبقى حد واحد فقط مضروبا فى معامل أسى. بعد إجراء بعض الترتيب يتسنى لنا كتابة المعادلة

$$\frac{d}{dt}a_{fi}(t)=(\iota\hbar)^{-1}\sum_n \langle f|\hat{V}|n\rangle e^{\iota(E_f-E_i)t/\hbar}a_{ni}(t) \qquad (١٤-٢١)$$

التى يمكن حلها مرتبطة بشرط الحدود (١٤-١٣).

نستطيع إدماج شرط الحدود مع المعادلة التفاضلية السابقة فى معادلة تكاملية واحدة، كالآتى:

$$a_{fi}(t)=\delta_{fi}+(\iota\hbar)^{-1}\int_{-T/2}^{t}\sum_n \langle f|\hat{V}|n\rangle e^{\iota(E_f-E_i)t'/\hbar}a_{ni}(t')\,dt'$$

(١٤-٢٢)

لفهم هذه الخطوة لاحظ أولا أنه إذا كان

$$t=-T/2 \qquad (١٤-٢٣)$$

فإن مدى التكامل يتلاشى وتؤول المعادلة (١٤-٢٢) إلى شرط الحدود المطلوب (١٤-١٣). ثانيا، تفاضل المعادلة (١٤-٢٢) بالنسبة للزمن هو بالضبط المعادلة (١٤-٢١).

ينظر للمعادلة (١٤-٢٢) على أنها من المعادلات المهمة المعبرة عن سعات الانتقالات $a_{fi}(t)$، وذلك لأنها تعطى قيم مضبوطة لتلك السعات (مضبوطة لأننا لم نستخدم أى تقريبات حتى الآن) . إلا أن هذه المعادلة

ليس لها حل فى شكل محـدود[1] . يتسـنى لنـا الحصـول علـى حـل تقريبـى بسيط لو افترضنا إمكانية عمـل مفكوك بدلالـة قـوى طاقـة التفـاعل $\hat{V}$ (أو بدقة أكثر بدلالة قوى عنصر المصفوفـة $\langle f|\hat{V}|n\rangle$). مـن هـذا فإننـا نحصـل على التقريب الصفرى بإهمال التكامل بكامله لنجد

$$a_{fi}(t)=\delta_{fi} \tag{١٤-٢٤}$$

وهذا هو التعبـير الجـبرى للحقيقـة الفيزيائيـة الواضحـة التـى تفيـد أنـه عنـد إهمال طاقة التفاعل يبقى النظام فى حالته الابتدائية عند كل الأزمنة (انظـر المعادلتين (١٤-٧)، (١٤-١٠))، أى أن

$$|\Psi_i(t)\rangle=|i(t)\rangle \tag{١٤-٢٥}$$

لإيجاد التقريب الذى يلى التقريب الصفرى نعوض من المعادلة (١٤-٢٤) فى التكامل الوارد بالمعادلة (١٤-٢٢). يصبح حينئـذ المجمـوع عديـم الأهمية ونستطيع تقييم المعادلة عند الزمن t = T/2 لتعطى

$$a_{fi}(T/2)=\delta_{fi}+(\iota\hbar)^{-1}\langle f|\hat{V}|i\rangle\int_{-T/2}^{T/2}e^{-\iota(E_f-E_i)t/\hbar}dt \tag{١٤-٢٦}$$

نفرض أن الحالة النهائية غير مماثلة للحالة الابتدائية، أى أن

$$\delta_{fi}=0 \tag{١٤-٢٧}$$

عندها يمكن التعويض من المعادلة (١٤-٢٦) فى المعادلة (١٤-١٦). من الأنسب أخذ النهاية عندما تؤول الفترة الزمنية إلى مالانهاية، ومن ثم

$$"w"=(\hbar)^{-2}\left|\langle f|\hat{V}|i\rangle\right|^2\times$$
$$\times\lim_{T\to\infty}\left[\hbar\int_{-T/2}^{T/2}e^{\iota(E_f-E_i)t/\hbar}\frac{dt}{\hbar}\right]\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{\iota(E_f-E_i)t/\hbar}dt\right] \tag{١٤-٢٨}$$

---

(1) closed form

المعامل الذى بين أول قوسين مربعين من جهة اليسار يساوى

$$2\pi\hbar\delta(E_f - E_i) \qquad (١٤-٢٩)$$

وحيث أن هذا المعامل يتلاشى مالم يكن

$$E_f = E_i \qquad (١٤-٣٠)$$

فيجب علينا مساواة الأس الموجود بين القوسين المربعين الآخرين بالصفر. على ذلك فإن الكمية ككل تؤول إلى الواحد الصحيح ونستطيع أن نعبر عن معدل الانتقال كالآتى:

$$"w" = \frac{2\pi}{\hbar}\langle f|\hat{V}|i\rangle\delta(E_f - E_i) \qquad (١٤-٣١)$$

وجود الدالة δ يضمن لنا أن المعدل يساوى صفر مالم تكن الطاقة مُحقَّقة لقانون الحفظ. التعبير السابق تقليدى بعض الشيىء وذلك نتيجة للفترة الزمنية اللانهائية التى اعتبرناها، وأيضا لحقيقة اعتبارنا لحساب معدل الانتقال إلى حالة من الحالات النهائية المعرفة بالتحديد.

فى الواقع التجريبى يوجد عادة على الأقل جسيم واحد حر فى الحالة النهائية والذى يمكن اعتباره حاملا لطاقة محددة داخل حدود ضيقة، وأن اتجاه هذا الجسيم يُعَرَّف بزاوية مجسمة متناهية فى الصغر. بطريقة مكافئة نقول أن كمية الحركة الخطية للجسيم تُعَرَّف بواسطة جهاز الكشف لتقع داخل المدى p_f ، $p_f + dp_f$.

نفرض أن

$$\rho(p_f)d^3p_f = \rho(p_f)p_f^2 dp_f d\Omega_f \qquad (١٤-٣٢)$$

هو عدد الحالات الكمية فى المدى المذكور. نشير إلى هذه الحالات باسم

الحالات المعنية[1] . نحصل على معدل الانتقال إلى حالة من الحالات النهائية المعنية بضرب المعادلة (١٤-٣١) فى المعادلة (١٤-٣٢). (إذا كان هناك العديد من الجسيمات فى حالات نهائية فيجب أن يتواجد العديد من مثل هذه المعاملات - انظر المعادلة (١٤-٩٧) التى سترد فيما بعد).

نضع التعريف

$$\rho(E_f) = \delta(E_i - E_f)\rho(p_f)d^3 p_f \qquad (١٤-٣٣)$$

الذى يكافىء كثافة الحالات النهائية المعنية المتوافقة مع قوانين حفظ الطاقة.

بضرب المعادلة (١٤-٣١) فى المعادلة (١٤-٣٢) فإن معدل الانتقال الفعلى إلى حالة من الحالات المعنية يساوى

$$dw_{fi} = "w_{fi}"\rho(p_f)d^3 p_f \qquad (١٤-٣٤)$$

أو باستخدام المعادلة (١٤-٣٣) يساوى

$$\boxed{dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\hat{V}|i\rangle\right|^2 \rho(E_f)} \qquad (١٤-٣٥)$$

كتبنا هنا معدل الانتقال فى صورة تفاضل وذلك لأن $\rho(E_f)$ كمية تفاضلية تؤدى إلى معدل انحلال تفاضلى[2] أو إلى مساحة مقطع. نحصل على المعدل الكلى للانحلال أو مساحة المقطع الكلى بإجراء المجموع على كل الحالات المعنية الممكنة. هذا يستدعى إجراء تكامل على قيم كميات الحركة الخطية التى لم تعين من قبل بواسطة قانون حفظ الطاقة، وإجراء التكامل أيضا على كل الزوايا المجسمة بالحالة النهائية.

---

(1) relevant states (2) differential decay rate

تم تطبيق المعادلة (١٤-٣٥) علـى مـدى كبير مـن الظواهـر الكميـة، ولـهذا فقد سماها إنريكو فيرمى[1] بالقـاعدة الذهبيـة. فيمـا يلـى سنستمر فـى دراسة استطارة جسيم مفرد بواسطة طاقة وضع ثابتة فى المقدار، ومن ثـم سوف نناقش الانتقالات الإشعاعية ومعدلات الانحلال.

١٤-٢ استطارة طاقة الوضع

مانود حسابه هنا هو مساحة المقطع التفـاضلى لاسـتطارة جسـيم تحـت تأثير طاقة وضع معينة. نستطيع إجراء ذلك بواسطة معرفتنا لمعدل انتقـال النظام من حالة ابتدائية يصاحبها كميـة حركـة خطيـة p_i إلـى حالـة نهائيـة يصاحبها كمية حركة خطية p_f.

نعتبر أولا المعامل الذى يصف كثافة الحالات النهائية المعنيـة. لجسـيم حر تتحصر حركته فى بعد واحد فى المدى

$$0 \leq x \leq L \qquad (١٤-٣٦)$$

نجد أن الحالـة المناسبة، والمسـواة، لكميـة الحركـة الخطيــة هــى (انظـر المعادلة (٣-٣٣)):

$$\langle x|p_n\rangle = L^{-1/2} e^{i p_n x/\hbar} \qquad (١٤-٣٧)$$

حيث من المعادلة (٢-١١) نحصل على

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} n \qquad (١٢-٣٨)$$

لهـذا فـإن عــدد الحــالات المتواجـدة فــى مــدى كميــة الحركــة الخطيــة، $p \rightarrow p+dp$، يساوى

(1) Enrico Fermi

$$dn = \frac{L}{2\pi\hbar} dp \qquad (١٤-٣٩)$$

أما فى الثلاثة أبعاد فإننا نكتب الحالة المناسبة، والمسواة، المناظرة كما يلى:

$$\langle x | p_n \rangle = L^{-3/2} e^{i p_n . x/\hbar} \qquad (١٤-٤٠)$$

وبنفس المفهوم السابق يكون عدد الحالات فى مدى ما من كمية الحركة الخطية مساويا

$$\rho(p) d^3 p = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3 p = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2\, dp\, d\Omega \qquad (١٤-٤١)$$

يجدر بنا الإشارة هنا إلى أن الكمية $L^3 d^3 p$ تعبر عن حجم ما فى فراغ-الطور(1) وأننا قد توصلنا إلى نتيجة لها أهميتها فى الميكانيكا الإحصائية، وهى وجود حالة كمية واحدة لكل حجم(2) مساوى

$$(2\pi\hbar)^3 = h^3 . \qquad (١٤-٤٢)$$

عند الاستطارة داخل زاوية مجسمة $d\Omega_f$ تعطى كثافة الحالات النهائية المعنية بالعلاقة (من المعادلة (١٤-٣٣))؛

$$\begin{aligned} \rho(E_f) &= \delta(E_i - E_f)\, \rho(p_f)\, d^3 p_f \\ &= \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p_f^2 \frac{dp_f}{dE_f} d\Omega_f\, \delta(E_i - E_f)\, dE_f \end{aligned} \qquad (١٤-٤٣)$$

بإجراء التكامل على أى مدى من الطاقات النهائية، التى تتبع قانون حفظ الطاقة، تتلاشى الدالة- δ، وهذا يستلزم أن يكون

$$E_i = E_f = \frac{p_f^2}{2m} \qquad (١٤-٤٤)$$

---

(1) phase-space (2) one quantum state per volume

ومنه

$$\frac{dE_f}{dp_f}=\frac{p_f}{m} \qquad (١٤-٤٥)$$

وبالتعويض فى المعادلة (١٤-٤٣) نجد

$$\rho(E_f)=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m\, p_f\, d\Omega_f \qquad (١٤-٤٦)$$

بهذا السياق يمكن التفكير فى الحجم L^3 الذى تم تسوية الحالات بداخله على أنه كبير جدا، ولكنه مايزال صغيرا بدرجة كافية لعدم استيعاب الجهاز اللازم لإنتاج الحزمة الابتدائية والكشف عن الجسيم المستطار. ينبغى ألا تؤثر هذه الفكرة على النتيجة النهائية. وهذا بمثابة اختبار طفيف لمفهومنا عن عدم ظهور L^3 فى التعبير النهائى عن مساحة المقطع التفاضلى (انظر المعادلة (١٤-٥١) التى سترد فيما بعد).

نحن الآن بصدد كتابة علاقة واضحة تعبر عن معدل الانتقال. مساحة المقطع التفاضلى ماهى إلا معدل الانتقال لوحدة الفيض، وقد بينا ذلك بالبندين ١٠-١، ١٠-٣، بالباب العاشر.

لدواعى التسوية نضع فيض الحالة الابتدائية فى الصورة

$$\text{Flux} = \text{الفيض} = \rho v=\frac{1}{L^3}\frac{p_i}{m} \qquad (١٤-٤٧)$$

بتراكب القاعدة الذهبية (١٤-٣٥) مع المعادلة (١٤-٤٦) المعبرة عن كثافة الحالات النهائية، والمعادلة (١٤-٤٧) المعبرة عن الفيض الابتدائى، فإن العلاقة التى تعطى مساحة المقطع التفاضلى للاستطارة داخل الزاوية المجسمة $d\Omega$ تكتب كما يلى (انظر البند ١٠-٣):

$$\sigma(\vartheta,\varphi)=\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{Flux}\cdot\frac{dw_{fi}}{d\Omega}$$

$$=\left(\frac{mL^3}{p_i}\right)\left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)\left|\langle p_f|\hat{V}|p_i\rangle\right|^2\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m\,p_f \qquad (١٤-٤٨)$$

للوصول إلى التعبير السابق تم إجراء خطوات طويلة بعض الشيىء. الجزء الوحيد المتبقى هو حساب عنصر مصفوفة طاقة الوضع. يمكن عمل ذلك باستخدام رموز ديراك واتباع أسلوب المعادلة (١٢-٢٢) مع تذكر أننا هنا نواجه مسألة حقيقية فى الثلاثة أبعاد.

إذا كانت طاقة الوضع مركزية ومتماثلة كرويا فإننا نجد

$$\langle p_f|\hat{V}|p_i\rangle=\int\langle p_f|r\rangle V(r)\langle r|p_i\rangle d^3r$$

$$=\frac{1}{L^3}\int e^{-\iota p_f\cdot r/\hbar}V(r)e^{\iota p_i\cdot r/\hbar}d^3r \qquad (١٤-٤٩)$$

$$=\frac{1}{L^3}\int e^{-\iota K\cdot r}V(r)\,d^3r=\frac{1}{L^3}\tilde{V}(K)$$

حيث

$$K\hbar=(p_f-p_i) \qquad (١٤-٥٠)$$

هى كمية الحركة الخطية المنتقلة إلى الجسيم أثناء انتقاله من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية.

بالتعويض من المعادلة (١٤-٤٩) فىالمعادلة (١٤-٤٨) نحصل على

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\frac{p_f}{p_i}\left|\tilde{V}(k)\right|^2 \qquad (١٤-٥١)$$

فى حالة الاستطارة المرنة[1] تصبح قيمتا كمية الحركة الابتدائية

---

(1) elastic scattering

والنهائية متساويتين، ومن ثم يؤول الاعتماد الصريح على كميتى الحركة الخطية بالمعادلة السابقة إلى الوحدة. يظهر بالمعادلة المعامل المحتوى على كميات الحركة الخطية بسبب الفيض الابتدائى وكثافة الحالات النهائية، وليس لميكانيكية التفاعل المحتواة فى الكمية $\tilde{V}(K)$ دخل فى ذلك.

لطاقات الوضع الأكثر عمومية التى تتسبب فى حدوث تغيير فى طبيعة واتجاه الجسيم المستطار يصبح المعامل المحتوى على كميتى الحركة الخطية الابتدائية والنهائية له أهمية قصوى. من الآن فصاعدا سوف نضع

$$p_f = p_i = p \qquad (١٤-٥٢)$$

بمقارنة المعادلة (١٤-٥١) بالمعادلة (١٠-٢٦) يظهر لنا (بغض النظر عن المعامل المحتوى على $\hbar, m$) أن $\tilde{V}(K)$ هو سعة الاستطارة، $f(\vartheta)$، الناتجة عن طاقة الوضع $V(r)$. يتضح لنا أيضا من المعادلة (١٤-٤٩) أن $\tilde{V}(K)$ هو انتقال فورير لطاقة الوضع، نسبة إلى انتقال فورير لكمية الحركة. انتقال فورير عبارة عن كمية قياسية تعتمد فقط على الكميات القياسية التى يمكن تأسيسها من كل من p_i, p_f، وهى

$$p_i^2 = p_f^2 = 2mE \qquad (١٤-٥٣)$$

أو

$$p_i \cdot p_f = p^2 \cos\vartheta \qquad (١٤-٥٤)$$

حيث ϑ هى الزاوية التى يُستطار الجسيم خلالها (زاوية الاستطارة). لهذا فإن مساحة المقطع التفاضلى تظهر كدالة فى الطاقة وزاوية الاستطارة، كما يجب أن تكون.

إذا كان R هو مدى طاقة الوضع فإن الزمن الذى يقضيه الجسيم داخل منطقة تأثير طاقة الوضع يساوى

$$\tau = \frac{R}{v} = \frac{R\,m}{p} \qquad (١٤-٥٥)$$

تتحقق صلاحية التقريب الذى وضعناه من قبل (وهو إجراء مفكوك فى صورة قوى طاقة الوضع) إذا كان حاصل ضرب زمن المرور τ وطاقة وضع الاستطارة $\langle V \rangle$ صغيرا بالنسبة إلى $\hbar$، أى إذا كان

$$\tau \langle V \rangle < \hbar$$

أو

$$p > \frac{R\,m\langle V \rangle}{\hbar} \qquad (١٤-٥٦)$$

من هنا فإن هذه النظرية تطبق فى الأحوال التى تشتمل على كميات حركة خطية كبيرة، أو بمعنى آخر تطبق عند الطاقات العالية. هذا يعنى أن نظرية الاضطراب تكمل التحليل الذى قدمناه فى صورة إزاحات الطور بالباب العاشر. التحليل فى صورة إزاحات الطور له أهميته عند الطاقات المنخفضة، حيث يشارك فى حل المسألة عدد محدود من حالات كمية الحركة الزاوية.

لحساب انتقال فورير لطاقة الوضع ندخل الإحداثيات القطبية بحيث يكون المحور القطبى[1] فى اتجاه K. نشير إلى المتغيرات الزاوية الإضافية بالرموز φ', ϑ'، وذلك لتمييزها عن φ, ϑ التى يعتمد عليها K وتتمتع بأهميتها الفيزيائية حيث يستطار الجسيم خلالها.

لهذا نكتب

(1) polar axis

$$\tilde{V}(K)=\int e^{\iota K\cdot r}V(r)\,d^3r$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{\iota Kr\cos\vartheta'}V(r)\,r^2\sin\vartheta'\,dr\,d\vartheta'\,d\varphi' \qquad (٥٧-١٤)$$

يمكن إجراء التكامل على φ' فى الحال، كما أن التكامل على ϑ' يمكن أيضا إجراؤه بسهولة لنحصل على

$$\tilde{V}(K)=\frac{4\pi}{K}\int_0^{\infty} r\sin Kr\,V(r)\,dr \qquad (٥٨-١٤)$$

كمثال على ذلك نعتبر طاقة الوضع الكولومية المحجوبة[1]

$$V(r)=g\frac{e^{-\mu r}}{r} \qquad (٥٩-١٤)$$

مرة أخرى، يمكن إجراء التكامل بسهولة لنجد

$$\tilde{V}(K)=\frac{4\pi g}{K^2}\left(1+\frac{\mu^2}{K^2}\right) \qquad (٦٠-١٤)$$

نحصل على طاقة الوضع الكولومية لجسيم شحنته Z_1e حدث له استطارة مبتعدا عن شحنة ثابتة Z_2e بأخذ

$$g=Z_1Z_2e_M^2 \quad , \quad \mu=0 \qquad (٦١-١٤)$$

بالتعويض فى المعادلة (١٤-٥١) نحصل على مساحة المقطع التفاضلى للاستطارة الكولومية (استطارة رذرفورد) فى الصورة

$$(\sigma(\vartheta)=)\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{2Z_1Z_2e_M^2\,m}{\hbar^2K^2}\right)^2 \qquad (٦٢-١٤)$$

بتربيع المعادلة (١٤-٥٠) تعطى

$$K^2\hbar^2=4p^2\sin^2\vartheta/2 \qquad (٦٣-١٤)$$

وتؤول المعادلة (١٤-٦٢) إلى

---

(1) screened Coulomb potential

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{2Z_1Z_2e_M^2m}{2p^2\sin^2\vartheta/2}\right)^2 \qquad (٦٤-١٤)$$

عند زوايا صغيرة تصبح ϑ قريبة الشبه بالتعبير التقريبى الحاصلين عليه من النظرية الكلاسيكية فى المعادلة (١٠-١٦). يتضح هنا أن حقيقة عدم اعتماد مساحة المقطع الكمى[1] على $\hbar$ وتماثلها مع النتيجة الكلاسيكية المضبوطة هى من الصفات المميزة لطاقة الوضع البسيطة التى تتبع القانون 1/r .

أخيرا، نشير إلى أننا اعتبرنا حالة استطارة جسيم مفرد بواسطة طاقة وضع ثابتة المقدار. من المسائل الفيزيائية المعتادة حالة استطارة جسيمين نتيجة لطاقة وضع تفاعل متبادل[2] بينهما تعتمد على المسافة بين الجسيمين. بينا فى البند ١٠-٥ أن الاستطارة المنسوبة إلى محاور إسناد مركز الكتلة تُعطَى فى مثل هذه الأحوال من الصياغة التقليدية للمسألة، بشرط استبدال كتلة الجسيم المستطار بالكتلة المختصرة لجسيمى النظام.

للحصول على مساحة المقطع الكلى نجرى التكامل على الزاوية المجسمة.

١٤-٣ الانتقالات الإشعاعية

يمكن لنا أيضا استخدام القاعدة الذهبية لحساب الانتقالات الذرية المستحثة بواسطة الإشعاع الكهرومغناطيسى.

نعتبر الامتصاص والانبعاث المستثار[3] بسبب وجود مجال إشعاعى كلاسيكى[4] . مثل هذه المسائل نستطيع معالجتها دون الدخول فى تعقيدات

---

(1) quantum cross section (2) mutual interaction potential (3) stimulated emission (4) classical radiation field

الفوتونات. سنتعامل هنا بالتحديد مع الانتقالات التى تتم بين حالات متقطعة، مع الاهتمام الخاص بالاعتماد الزمنى.

نفرض نبضة مستوية[1] من الإشعاع الكهرومغناطيسى الذى يلازمه فترة بقاء وتردد طيفى[2] معينين. نستطيع التعبير عن هذه النبضة فى صورة طاقة الوضع المتجهة[3]

$$A(r,t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{-\iota(\omega t - k\cdot r)}\, d\omega \qquad (١٤-٦٥)$$

حيث k متجه، فى اتجاه انتشار النبضة، قيمته تساوى

$$k=\omega/c \qquad (١٤-٦٦)$$

وحيث أن

$$\mathrm{div}A=0 \qquad (١٤-٦٧)$$

$$\therefore \quad A\cdot k=0 \qquad (١٤-٦٨)$$

أما كون الكمية $A(r,t)$ حقيقية فيؤدى إلى

$$A(-\omega)=A^{*}(\omega) \qquad (١٤-٦٩)$$

المجال الكهربى يساوى

$$E=-\frac{\partial A}{\partial t} \qquad (١٤-٦٩)$$

ومنه

$$|E|=\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, A(\omega)\, e^{-\iota(\omega t - k\cdot r)}\, d\omega \qquad (١٤-٧١)$$

والحث المغناطيسى[4] يساوى

---

(1) plane pulse (2) frequency spectrum (3) vector potential (1) magnetic induction

$$B = \text{curl} A \qquad (١٤-٧٢)$$

باستخدام المعادلة (١٤-٦٦) فإن المعادلة السابقة تعطى

$$|B| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{c} A(\omega) e^{-\iota(\omega t - k \cdot r)} d\omega \qquad (١٤-٧٣)$$

يُعَيِّن فيض الطاقة[1] (أى الطاقة لكل وحدة زمن لكل وحدة مساحة عمودية على اتجاه الانتشار) من متجه الموضع[2] . يكون متجه الموضع فى اتجاه **k** وقيمته تساوى

$$|N| = \left|\frac{1}{\mu_0} E \wedge B\right|$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \int\int \omega \omega' A(\omega) A(\omega') e^{-\iota[(\omega+\omega')t-(k+k')r]} \omega \, d\omega' \qquad (١٤-٧٤)$$

ومنه فإن الطاقة الكلية المارة خلال وحدة المساحات، العمودية على اتجاه الانتشار، أثناء الفترة الزمنية الكلية لبقاء النبضة، تساوى

$$\int_{-\infty}^{\infty} |N| dt = \frac{2\pi}{c\mu_0} \int \int_{-\infty}^{\infty} \omega \omega' A(\omega) A(\omega') e^{\iota(k+k')\cdot r} \delta(w + w') d\omega \, d\omega'$$

$$= \frac{4\pi}{c\mu_0} \int_0^{\infty} \omega^2 |A(\omega)|^2 d\omega \qquad (١٤-٧٥)$$

للوصول إلى المعادلة السابقة استخدمنا المعادلة (١٢-٣٩).

على ذلك فإن الطاقة الكلية الناشئة عن الفترة الزمنية الكلية لبقاء النبضة لوحدة المساحات ولمدى التردد $\omega - \omega + d\omega$ تساوى

---

(1) energy flux (2) poynting vector

$$I(\omega)\,d\omega = \frac{4\pi\omega^2}{c\mu_0}|A(\omega)|^2\,d\omega = 4\pi\varepsilon_0 c\omega^2|A(\omega)|^2\,d\omega \quad (١٤-٧٦)$$

حيث استخدمنا العلاقة

$$c^2\mu_0\varepsilon_0 = 1 \quad (١٤-٧٧)$$

لاحظ أن الشدة لكل وحدة مساحة، I(w)، لها الأبعاد

$$[I(\omega)] \sim [\text{طاقة} \backslash (\text{زمن} \times \text{مساحة})] \quad (١٤-٧٨)$$

نحسب الآن قيمة احتمال أن تستحث النبضة انتقال معين في ذرة الهيدروجين (على فرض أن نواة الهيدروجين مستقرة عند نقطة الأصل) من حالة ابتدائية

$$|i\rangle \equiv |n,\ell,m\rangle$$

إلى حالة نهائية

$$|f\rangle \equiv |n',\ell',m'\rangle$$

تسفر هذه العملية عن امتصاص أو انبعاث طاقة، وذلك تبعا لصغر أو كبر E_i بالنسبة إلى E_f.

تعطى طاقة التفاعل بين المجال الإشعاعى والإلكترون الموجود بالذرة من العلاقة

$$\begin{aligned}\hat{V} &= A(r,t)\cdot\hat{J} \\ &= \frac{e}{m_e}A(r,t)\cdot\hat{p}\end{aligned} \quad (١٤-٧٩)$$

حيث $\hat{J}$ هى كثافة التيار الإلكترونى و $\hat{p}$ هو مؤثر كمية الحركة الخطية للإلكترون. نظرا لأن $\hat{V}$ يعتمد اعتمادا صريحا على الزمن فإننا لانستطيع استخدام القاعدة الذهبية فى هذه المرحلة، وبالتالى نعود إلى المعادلة (١٤-٢٦).

بالتعويض عن $\hat{\nabla}$ من المعادلة (١٤-٧٩) وعن A مـن المعادلـة (١٤-٦٥) تُكتب المعادلة (١٤-٢٦) كالآتى:

$$a_{fi}(T/2) = (\iota\hbar)^{-1}\langle f|\iint A(\omega)\frac{e}{m_e}\cdot\hat{p}\, e^{\iota k\cdot r}|i\rangle \times \times\int_{-T/2}^{T/2} e^{\iota(E_f - E_i - \hbar\omega)t/\hbar}\, dt\, d\omega \qquad (١٤-٨٠)$$

ولهذا

$$a_{fi}(\infty) = 2\pi\iota\langle f|\iint A(\omega)\cdot p\frac{e}{m_e}\, e^{\iota k\cdot r}|i\rangle \times \times\delta(E_i - E_f - \hbar\omega)\, d\omega \qquad (١٤-٠٨١)$$

$$= -\frac{2\pi\iota}{\hbar}\frac{e}{m_e}A(\omega_{fi})\langle f|\hat{p}_A\, e^{\iota k\cdot r}|i\rangle$$

حيث فى التعبير النهائى

$$\hbar\omega_{fi} = E_i - E_f \qquad (١٤-٨٢)$$

وتلك هى قاعدة بوهر (١-٢١).

تعطـى قيمـة k التـى تظهـر فـى الدالـة الأسـية بالمعادلـة (١٤-٨١) بواسطة العلاقة (استخدم المعادلة (١-٢٧))

$$k = \frac{\omega_{fi}}{c} = \left(\frac{e_M^2}{\hbar c}\right)\frac{1}{2a_0}\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right| \qquad (١٤-٨٣)$$

ومنه

$$k a_0 \cong \left(\frac{e_M^2}{\hbar c}\right) = \frac{1}{137} \qquad (١٤-٨٤)$$

مما يؤسس النتيجة المهمة وهى أن الأطوال الموجيـة للإشـعاع المنبعـث أو الممتص فى الانتقالات الذرية تكون قيمتهـا أكبر مـن اتسـاع الـذرة بمقدار الضعف.

يكتب عنصر المصفوفة بالمعادلة (١٤-٨١) بصورة أكثر وضوحا كما يلي:

$$\langle f|\hat{p}_A e^{\iota k\cdot r}|i\rangle = \int u^{*}_{n'\ell'm'}(r)\left(-\iota\hbar\nabla_A\right)e^{\iota k\cdot r}\,u_{n\ell m}(r)\,d^3r \qquad (١٤-٨٥)$$

وحيث أن الدوال المناسبة، u(r)، تساوى الصفر لقيم r التى تكبر بكثير عن نصف قطر بوهر فإن العلاقة (١٤-٨٤) توضح لنا أن الحد الأسى بالمعادلة (١٤-٨١) يمكن تقريبه إلى الوحدة. وهذا هو مايعرف بتقريب ثنائى القطب[1].

باستخدام تقريب ثنائى القطب فى المعادلة (١٤-٨١) نجد أن احتمال أن تستحث النبضة انتقال يساوى

$$\begin{aligned} w &= |a_{fi}(\infty)|^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{\hbar^2}\frac{e^2}{m_e^2}|A(\omega_{fi})|^2\,|\langle f|\hat{p}_A|i\rangle|^2 \qquad (١٤-٨٦) \\ &= 4\pi^2\left(\frac{e_M^2}{\hbar c}\right)\frac{I(\omega)}{m_e^2\,\omega_{fi}^2\,\hbar}|\langle f|\hat{p}_A|i\rangle|^2 \end{aligned}$$

للحصول على التعبير النهائى استخدمنا المعادلة (١٤-٧٦) وتعريف e_M^2.

من ناحية المبدأ ماتوصلنا إليه يمثل الإجابة المطلوبة، إلا أنه يمكن الوصول إلى مفهوم أعمق للمسألة من الفكرة البسيطة الآتية:

على ضوء الأبعاد نستطيع تقريب كمية الحركة الخطية إلى

$$\langle f|\hat{p}_A|i\rangle \cong m_e\,\omega_{fi}\,a_0 \qquad (١٤-٨٧)$$

بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (١٤-٨٦) نحصل على

$$w \cong 4\pi\left(\frac{e_M^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{I(\omega_{fi})\,\pi\,a_0^2}{\hbar}\right) \qquad (١٤-٨٨)$$

(1) dipole approximation

يمكن البرهنة على صحة التقريب (١٤-٨٧) كما يلى:

من مبدأ التناظر

$$\hat{p}_A = m_e \frac{d\hat{r}_A}{dt}$$

حيث r_A هى مركبة مؤثر الموضع لإلكترون يسير فى اتجاه طاقة الوضع المتجهة. من المعادلة (١٣-٣٧)

$$\iota\hbar \frac{d\hat{r}_A}{dt} = \left[\hat{r}_A , \hat{H}\right]$$

ومنه

$$\begin{aligned}\langle f|\hat{p}_A|i\rangle &= (\iota\hbar)^{-1} m_e \langle f|\hat{r}_A \hat{H} - \hat{H}\hat{r}_A|i\rangle \\ &= \iota m_e \frac{E_f - E_i}{\hbar} \langle f|\hat{r}_A|i\rangle \\ &= \iota m_e \omega_{fi} \langle f|\hat{r}_A|i\rangle\end{aligned}$$

من المعقول تماما الآن وضع التقريب

$$\langle f|\hat{r}_A|i\rangle \cong a_0$$

ليكون

$$\langle f|\hat{p}_A|i\rangle \cong m_e \omega_{fi} a_0$$

بكتابة الاحتمال فى تلك الصورة يصبح لهذا التعبير تعليلا فيزيائيا واضحا تماما. نظرا لأننا نحسب احتمالا معينا فإن النتيجة لابد أن تمثل بعدد. المعامل الأول الواقع بين القوسين هو ثابت التركيب الدقيق (أنظر المعادلة (٨-٦))، ويعبر عن شدة التفاعل الكهرومغناطيسى (كمية ليس لها أبعاد). واضح أن المعامل πa_0^2 هو عبارة عن مساحة المقطع المستعرض من

الذرة كما يبدو للحزمة الساقطة. وحيث أن $I(\omega)$ عبارة عن شدة لكل وحدة مساحة فإن العدد يكون حينئذ ممثلا لشدة الطاقة للنبضة ككل (عند تردد بوهر) التى تصدم الذرة. من الملاحظ فى المعادلة (١٤-٧٨) أن البسط $(I(\omega_{fi})\pi a_0^2)$ له نفس وحدات $\hbar$، أى أن المعامل ككل بالمعادلة (١٤-٨٨) مجرد عدد ليس له وحدات كما يجب أن يكون.

نحصل على مساحة مقطع الانتقال الذى لايعتمد على النبضة بضرب المعادلة (١٤-٨٦) فى $\hbar\omega$، بغرض إعطاء الفقد المحتمل فى الطاقة، ثم القسمة على معامل الشدة؛ أى أن

$$a_{fi} = \frac{\hbar\omega_{fi}\,\omega}{I(\omega_{fi})} = 4\pi\omega_{fi}\left(\frac{e_M^2}{\hbar c}\right)\pi\left|\langle f|\hat{r}_A|i\rangle\right|^2 \qquad (١٤-٨٩)$$

١٤-٤ تحلل-بيتا

نطبق الآن القاعدة الذهبية على المسألة النووية لتحلل-بيتا وذلك لإلقاء بعض من التفصيل على الفكرة التى تنص على أن متوسطات الأعمار الملاحظة للجسيمات النووية-الجزئية الغير مستقرة يجب أن تعزو إلى تفاعل نووى ضعيف ومستقل. مرت علينا هذه الفكرة من قبل فى البند ١١-٤.

نعتبر العملية الآتية لتحلل النيوترون

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

تاريخيا يعد هذا التحلل على أنه أول تأثيرات التفاعلات النووية الضعيفة التى تم اكتشافها. من الجدول ١١-١ يتضح لنا شذوذ هذا التحلل، نظرا لأن متوسط العمر الملاحظ (احدى وعشرين دقيقة) يختلف عن الزمن النووى النموذجى بمقدار سبع وعشرون مرة من قوى العشرة. عملية تعليل وجود هذا المعامل الكبير للغاية توضح لنا مسألة أخرى سترد فيما بعد.

نفترض عملية تحلل نيوترون حر فى وضع السكون مع إهمال المغزلية. حيث أن النيوترونات والبروتونات أثقل بكثير من اللبتونات (إلكترون + نيوترينو) فمن المعقول إهمال ارتداد البروتون واعتبار كونه فى وضع السكون أيضا.

يمكن وصف النيوكلونات بواسطة دوال موجية مسواة شديدة المحلية[1]

$$u_n(r)\ ,\ u_p(r) \tag{١٤-٩٠}$$

تتلاشى عند مسافات أكبر من نصف قطر كومتون للنيوكلون، أى تتلاشى عند المسافات

$$r > \frac{\hbar}{m_p c} \tag{١٤-٩١}$$

ينبعث كل من الإلكترون والنيوترينو بكميات حركة خطية كبيرة، p_ν, p_e ومصاحبا لهما دوال موجية عبارة عن موجات دى برولى المناظرة لكميات الحركة هذه. سوف تتم تسوية الدوال الموجية مرة أخرى فى حجم كبير L^3 (انظر المعادلة (١٤-٤٠)).

نعتبر أن التفاعل المتسبب فى الانتقال يعين ببساطة بواسطة بارامتر g_β يشير إلى شدة التفاعل لهذا فإن عنصر المصفوفة الذى يظهر فى المعادلة المعبرة عن القاعدة الذهبية يساوى

$$\left|\langle i|V|f\rangle\right|^2 = \left|\frac{g_\beta}{L^3}\int u_n^*(r)\,u_p(r)\,e^{\iota p_e r/\hbar}\,e^{\iota p_\nu r/\hbar}\,d^3r\right|^2 \tag{١٤-٩٢}$$

وحيث أن

$$p_e << m_p c \tag{١٤-٩٣}$$

---

(1) highly localized normalized wave function

فهذا يستدعى أن يكون

$$\frac{p_e r}{\hbar} << 1 \qquad (٩٤-١٤)$$

وذلك لجميع قيم r التى عندها الدالة $u_p(r)$ غير صفرية.

تتحقق المعادلة السابقة أيضا لقيم p_ν، وعليه نستطيع استبدال الحدين الأسيين بداخل التكامل الوارد بالمعادلة (١٤-٩٢) بالوحدة. وحيث أننا نتوقع تشابه الدالتان $u_p(r), u_n(r)$ فإن التكامل حينئذ يمكن تقريبه ليساوى تكامل التسوية، الذى بدورة يساوى الوحدة. من الملائم تعريف شدة التفاعل الضعيف بدلالة ثابت f^2 ، مثلا، له نفس أبعاد e^2. لعمل ذلك ينبغى قسمة g_β على مربع مسافة معينة. من المعقول هنا اعتبار هذه المسافة على أنها نصف قطر كومتون للبروتون. لهذا نجد

$$g_\beta = f^2 \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 \qquad (٩٥-١٤)$$

فى محيط هذا التقريب نحصل على

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 = \frac{f^4}{L^6} \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^4 \qquad (٩٦-١٤)$$

عدد الحالات فى فراغ الطور المتاح للإلكترون والنيوترينو يساوى بالضبط نفس العدد المناظر لجسيم مفرد فى مسألة الاستطارة. وحيث أن البروتون يكون فى حالة فريدة، فمن المعادلة (١٤-٤١) نجد

$$\rho(E_f) = \delta(E_i - E_f) \frac{L^3 p_e^2 dp_e d\Omega_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{L^3 p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (٩٧-١٤)$$

من الأنسب كتابة

$$dp_e \, dp_\nu = \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial E_f} \right) dp_e \, dE_f \qquad (٩٨-١٤)$$

ثم إجراء التكامل على E_f. يؤدى هذا إلى تلاشى الدالة- δ من المعادلة (١٤-٩٧)، والالتزام بتطبيق قانون حفظ الطاقة. لهذا

$$E_i = m_n c^2 = E_f = m_p c^2 + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + p_\nu c \qquad (١٤-٩٩)$$

وكذلك

$$\frac{\partial E_f}{\partial p_\nu} = c \qquad (١٤-١٠٠)$$

ومنه

$$\rho(E_f) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^6 \frac{1}{c} p_e^2 \, p_\nu^2 \, dp_e \, d\Omega_e \, d\Omega_\nu \qquad (١٤-١٠١)$$

نستطيع الآن التعويض من المعادلتين (١٤-٩٦)، (١٤-١٠١) فى القاعدة الذهبية (١٤-٣٥) للحصول على المعدل التفاضلى لتحلل-بيتا

$$\frac{d^3 w}{dp_e \, d\Omega_e \, d\Omega_\nu} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{f\hbar}{m_p c}\right)^4 \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^6 \frac{p_e^2 \, p_\nu^2}{c} \qquad (١٤-١٠٢)$$

تختص هذه المعادلة بعملية الملاحظة الكاملة التى يمكن إجراؤها، من ناحية المبدأ، وفيها يقاس اتجاه اللبتونات (أى اتجاه الإلكترون والنيوترينو) وطاقة الإلكترون، ثم باستخدام قانون حفظ الطاقة نعين طاقة النيوترينو. أما القياسات الزاوية فتمدنا بالمعلومات عن الاعتماد الزاوى للتفاعل. وحيث أننا قد فرضنا من قبل عدم افتقادنا للتماثل عند إجراء التكامل على كلا الزاويتين المجسمتين (كل تكامل يمدنا بالمعامل 4π)، عندئذ وبعد إعادة ترتيب المعادلة السابقة نحصل على

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{1}{2\pi^3}\left(\frac{f^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{m_p c^2}{\hbar}\right)^6 \frac{p_e^2 \, p_\nu^2}{(m_p c)^5} \qquad (١٤-١٠٣)$$

التى تعين طيف كمية الحركة الخطية للإلكترون. أما القيمة العظمى لكمية الحركة الخطية للإلكترون، p_{max}، فنحصل عليها بمساواة كمية الحركة الخطية للنيوترينو بالصفر فى المعادلة (١٤-٩٩)؛

$$(m_n - m_p)c = \sqrt{p_{max}^2 + m_e^2 c^2} \qquad (١٤-١٠٤)$$

بحذف p_ν من المعادلة (١٤-١٠٣) نجد

$$\frac{dw}{dp_e} \approx p_e^2 \left(\sqrt{p_{max}^2 + m_e^2 c^2} - \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}\right)^2 \qquad (١٤-١٠٥)$$

تتيح هذه المعادلة للإلكترون أن ينبعث حاملا أى كمية حركة خطية محصورة فى المدى بين الصفر والقيمة العظمى لها، أما القيمة الأكثر احتمالا فتقع قرب منتصف هذا المدى المتاح.

هذه النتيجة تختلف بصورة واضحة عن النتيجة التى ينبغى أن نحصل عليها فى حالة عدم وجود نيوترينو فى الحالة النهائية. ففى هذا الوضع تعين كمية الحركة الخطية للإلكترون من قانون حفظ الطاقة بطريقة وحيدة. من الناحية التاريخية تعد عملية ملاحظة الإلكترون فى تحلل-بيتا على أنها أول دليل على وجود النيوترينو.

لإيجاد المعدل الكلى يجب أن نكامل المعدل الجزئى، المعادلة (١٤-١٠٣)، على p_e. مدى هذا التكامل ينحصر بين الصفر والقيمة العظمى المعطاة بالمعادلة (١٤-١٠٤)، التى تساوى تقريبا

$$p_{max} \cong \frac{3}{2} m_e c \qquad (١٤-١٠٦)$$

وحيث أن (من المعادلة (١٤-١٠٥)) $m_e c$ هى أيضا كمية الحركة الخطية النموذجية داخل علامة التكامل لذلك يجب تقريب التكامل على أساس الأبعاد ليصبح

$$\int_0^{p_{max}} p_e^2\ p_\nu^2\ dp_e \cong (m_e c)^5 \qquad (١٤-١٠٧)$$

بتراكب هذه المعادلة مع المعادلة (١٤-١٠٣) نجد أن المعدل يساوى

$$w \cong \frac{1}{2\pi^3}\left(\frac{m_p c^2}{\hbar}\right)\left(\frac{f^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^5 \qquad (١٤-١٠٨)$$

يوجد للثلاث معاملات التى بداخل الأقواس تفسيرات فيزيائية بسيطة ومباشرة. فأولها من ناحية اليسار هو الزمن النووى النموذجى (انظر المعادلة (١١-٥٩)) الذى يظهر بالمعادلة نتيجة لمساواة أبعاد الطرفين، وذلك لأن w عبارة عن احتمال لكل وحدة زمن. أما المعامل الثانى فهو ثابت، ليس له أبعاد، يحدد شدة تحلل-بيتا (تفاعل نووى ضعيف) بطريقة مشابهة تماما لثابت التركيب الدقيق فى الكهرومغناطيسية. من الواضح أن الحد الأخير ليس له أبعاد أيضا ويعد مقياسا (طبقا لمعيار نووى مناسب) لكمية فراغ الطور المتاح للنظام فى حالته النهائية.

كما أشرنا سابقا يجب تعليل التباين الشديد بين المعدل الملاحظ، وهو

$$w = 10^{-3}\ \ \sec^{-1} \qquad (١٤-١٠٩)$$

ومقلوب الزمن النووى الذى يساوى

$$\frac{m_p c^2}{\hbar} \cong 1.4\times 10^{24}\ \ \sec^{-1} \qquad (١٤-١١٠)$$

يتم تفسير ذلك جزئيا بواسطة معامل فراغ الطور الذى يساوى تقريبا

$$\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^5 \cong 10^{-16} \qquad (١٤-١١١)$$

مؤكدا حقيقة أن النيوترون يكون أثقل من البروتون بشكل يكفى بالضبط لجعل التحلل متاحا من ناحية الطاقة.

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (١٤-١٠٨) نحصل على

$$\left(\frac{f^{2}}{\hbar c}\right)^{2} \cong 10^{-10} \qquad (١١٢-١٤)$$

وتلك هى شدة التفاعل الضعيف الوارد فى الجدول ١١-٢.

فى التحللات الأخرى المدونة بالجدول ١١-١ تكون كميات الطاقات المتاحة أكبر بكثير مما فى حالة تحلل-بيتا، ويكون معامل فراغ الطور أقرب إلى الوحدة، مما يجعل فترات العمر الطويلة جدا طبقا للمقياس النووى (ليست أطول من فترة عمر النيوترون) محكومة بمدى ضعف التفاعل النووى الضعيف (انظر المسألة ١٤-٣).

نشير هنا إلى أن هذا التحليل يطبق على تحلل-بيتا من النيوترون (أو تحلل البروتون) داخل النواة على شرط استبدال طاقات السكون للنيوكلونات، التى تظهر بقانون حفظ الطاقة (١٤-٩٩)، بطاقات النواة الأم والنواة الابنة فى النظام المتحلل. يتسبب هذا فى حدوث تغييرات فى تعريف p_{max}، المعادلة (١٤-١٠٤)، ويجب أيضا أن يغير من قدر المساهمة الناشئة من معامل فراغ الطور. أخيرا نلاحظ أننا لانستطيع الإسهاب فى مناقشة تبعات تأثيرات عدم حفظ الندية المذكورة عند نهاية البند ١٣-٣، وذلك نظرا لإهمال المغزلية فى حساباتنا.

١٤-٥ ملخص

باستخدام معادلة شرودنجر للحركة استطعنا استنتاج القاعدة الذهبية- التعبير التقريبى للمعدل الاحتمالى لانتقال نظام من حالة غير مضطربة لأخرى.

استخدمت هذه القاعدة أولا لحساب مساحات مقطع الاستطارة تحت تأثير طاقة وضع معينة؛ وعلى وجه الخصوص فى حساب مساحة مقطع

استطارة رذرفورد. طبقت أيضا هذه القاعدة فى المعالجة شبه كلاسيكية لحساب مساحات المقطع للانتقالات الإشعاعية بالذرات- وضح أن مساحات المقطع تتناسب مع ثابت التركيب الدقيق $(e_M^2/\hbar c)$ مضروبا فى المساحة الفعالة من الذرة.

أخيرا تم استخدام القاعدة الذهبية لبناء المعنى الفيزيائى لتحلل-بيتا من نيوترون حر. الأكثر أهمية أننا أسسنا مقدار ضعف التفاعل النووى الضعيف، $(f^2/\hbar c)$، ووضحنا أيضا أن معدلات التحلل يمكن أن تتأثر بشدة بكمية فراغ الطور المتاح للنظام المتحلل فى حالته النهائية.

مسائل ١٤

١٤-١ باعتبار الجزء الزاوى فى التكامل الوارد بالمعادلة (١٤-٨٥) وضح أنه فى تقريب ثنائى القطب يكون احتمال الانتقال (للانبعاث أو الامتصاص فى ذرة الهيدروجين) متلاشى مالم يكن

$$\ell-\ell'=\pm 1 \quad ; \quad m=m' \quad ; \quad m-m'=\pm 1$$

١٤-٢ يمكن وصف التفاعل بين نيوترون حر ونواة ثقيلة بدلالة طاقة وضع البئر المربع

$$V(r)=-V \quad , \qquad r\leq a$$
$$V(r)=0 \quad , \qquad r>a$$

وضح أنه عند الطاقات العالية تتناسب مساحة المقطع التفاضلى مع $(j_1(Ka)/Ka)^2$ ، حيث K هى كمية الحركة الخطية المنتقلة، ودالة بسل

الكروية[1] هى

$$j_1(K\,a) = \left[\sin(K\,a) - K\,a\cos(K\,a)\right]/(K\,a)^2.$$

وَضّح أيضا أن لمساحة المقطع التفاضلى قمة أمامية شديدة بقيمة عظمى عند $K\,a \cong 6$

١٤-٣ طبقا للجدول ١١-٢ يتحلل الهيبرون-Λ[2] إلى بروتون وميزون-π (بيون[3]). باتباع نفس التقريب المستخدم فى حالة تحلل-بيتا (أى اهمال ارتداد الجسيمات الثقيلة) وضح أن الطاقة المتاحة للبيون تساوى تقريبا $(5/4)m_\pi c^2$ ، وأن كمية حركته تساوى حوالى $(3/4)m_\pi c$.

بسبب الأبعاد ينبغى لتفاعل التحلل أن يأخذ الصورة

$$V^2 \approx f_A^4\left(\frac{\hbar}{m_p\,c}\right)$$

استخدم القاعدة الذهبية لبيان أنه فى هذا التقريب يكون معدل التحلل الكلى (مقلوب متوسط العمر) مساويا

$$w = \frac{15}{16\pi}\left(\frac{f_A^2}{\hbar\,c}\right)^2\left(\frac{m_p\,c^2}{\hbar}\right)\left(\frac{m_\pi}{m_p}\right)^2$$

بالمقارنة مع المعادلة (١٤-١٠٨) لاحظ أن التغير فى معامل الطور النهائى يعلل الفرق الشديد بين متوسط عمر كل من الهيبرون - Λ والنيوترون، على فرض التساوى التقريبى لشدة تفاعل التحلل الضعيف فى كلا الحالين.

---

(1) spherical bessel function (2) Λ -hyperon (3) pion

الباب الخامس عشر

التماثل الوَحْدِى والفيزياء النووية-الجزئية[1]

١٥-١ التفاعلات القوية والشحنة الكهربية[2] والشحنة الباريونية[3] والشحنة الفوقية[4]

نحن الآن فى وضع يمكننا من الاستمرار فى دراسة خواص الجسيمات النووية الجزئية التى بدأناها فى البند ١١-٤. أوضحنا هناك فى تصادمات البروتون-نيوترون ظهور عدد كبير من الجسيمات النووية الجزئية.هذه الجسيمات هى الميزونات، النيوكلونات (النيوترون والبروتون) والهيبرونات، وقد دوناها فى الجدول ١١-١. تتولد هذه الجسيمات وتتفاعل مع بعضها البعض من خلال التفاعلات النووية القوية، وقد أطلق عليها اسم الجسيمات المتفاعلة بقوة أو الهادرونات[5]. معظم هذه الجسيمات غير مستقرة وتتحلل أو تضمحل من خلال التفاعلات النووية الضعيفة.

أوردنا سابقا تصادمات البروتون-بروتون. فى المعجلات الحديثة للبروتونات يمكن لحزمة مكونة من 10^{12} بروتون أن تعجل كل ثانيتين لتصبح طاقتها مساوية 30000 MeV (= 30 GeV). لتلك الطاقات وبهذه الكثافة يتم إنتاج الجسيمات الثانوية $\pi^{\pm}, K^{\pm}$ والبروتونات الضديدية $\overline{p}$ بوفرة كافية لفصلها بطرق كهرومغناطيسية إلى حزم ثم توجيهها إلى غرف الفقاعة الهيدروجينية[6] .

---

(1) unitary symmetry and sub-nuclear physics (2) electric charge (3) baryon charge (4) hypercharge (5) hadrons (6) hydrogen bubble chambers

تُحدِث الجسيمات المشحونة المُنتَجة فى التصادمات مع بروتونات ذرة الهيدروجين آثارا من الممكن تصويرها فوتوغرافيا. توضع غرف الفقاعة فى مجالات مغناطيسية قوية مما يتسبب فى انحناء هذه الآثار ممكنا التجريبيين من تحليل التصادمات بدلالة الطاقة وكمية حركة وكتل الجسيمات. بهذه الطريقة تم دراسة الكثير جدا من التصادمات النووية الجزئية فى الظروف المعملية. نشأ عن هذه الدراسة ظهور العديد من **الانتظامات**(1) فى صورة قوانين حفظ متعددة.

أول هذه الانتظامات كان واضحا تماما. فى الواقع نهتم هنا بالتفاعلات النووية فقط، ولذلك كتقريب جيد نستطيع إهمال القوى الكهربية والمغناطيسية. إلا أن الجسيمات فى حالاتها الابتدائية والنهائية يكون لكل منها شحنة كهربية مساوية لعدد صحيح (عادة هذا العدد يساوى ١± أو صفر إذا قيست الشحنة بوحدة شحنة الإلكترون). فى أى تفاعل أو عملية تحلل نووى تتساوى محصلتى الشحنة قبل وبعد العملية. لذلك ففى تفاعلات البروتون–بروتون، مثلا، التى ينتج فيها البيونات ، نحصل على

$$pp \rightarrow pn\pi^{+} ,$$

ولا يتسنى لنا الحصول على

$$pp \rightarrow pp\pi^{-}$$

بإدخال مؤثر الشحنة $\hat{Q}$ الذى يمثل عملية ملاحظة محصلة شحنة النظام (فهو مؤثر محفوظ) فإننا باستخدام المعادلة (١٣–٤٧) نجد

$$\left[\hat{H}_s , \hat{Q}\right] = 0 \qquad (١٥–١)$$

حيث $\hat{H}_s$ هو الهاميلتونى الذى يصف التفاعلات النووية القوية للهادرونات.

---

(1) regularities

يعبر عن قانون حفظ الشحنة الكهربية بالعلاقة

$$\Delta Q = 0 \qquad (٢-١٥)$$

قانون الحفظ الذى سيأتى بعد قليل يشبه إلى حد ما هذا القانون. فهو يبين حقيقة أن البروتون من الجسيمات المستقرة ولايتحلل إلى أى تجمع من الجسيمات المتاحة الأخف منه (انظر الجدول ١١-١). أبسط طريقة لتأكيد تلك الصفات هى بأن ننسب إلى البروتون وإلى كل الجسيمات (الجسيمات التى مغزليتها مساوية لأنصاف القيم الصحيحة) الأثقل منه نوعا آخرا مختلفا من الشحنة، نطلق عليه اسم الشحنة الباريونية $\hat{B}$ التى هى الأخرى تأخذ مقادير صحيحة فقط. لذلك ففى الجدول ١١-١ نجد أن الباريونات Ξ، Σ، Λ، n، p يصاحبها القيمة $\langle B \rangle = 1$، والميزونات K، η، π يصاحبها القيمة $\langle B \rangle = 0$.

للجسيمات الضديدية نجد أن الشحنة الباريونية مشابهة للشحنة الكهربية فهى تتساوى فى المقدار وتختلف فى الإشارة مع الشحنة الباريونية للجسيمات المناظرة. نفترض أيضا أن محصلة الشحنة الباريونية محفوظة فى أى تفاعل نووى، أى أن

$$\Delta B = 0 \qquad (٣-١٥)$$

لذلك يجب أن نحصل على

$$pp \rightarrow p\Sigma^{+} K^{0} \qquad (٤-١٥)$$

$$\rightarrow pp\eta \qquad (٥-١٥)$$

$$\pi^{-} p \rightarrow p\Lambda\overline{\Lambda}\pi^{-} \qquad (٦-١٥)$$

ولا يتسنى لنا الحصول على

$$\pi^{+} p \rightarrow \pi^{+} K^{+} \overline{K}^{0}$$

يجب أن يتحقق القارىء بنفسه من أن هذا القانون يمنع أى سلسلة من التفاعلات التى تمكن البروتونات من التحلل إلى جسيمات أخف منه.

يطبق قانونا حفظ الشحنة الكهربية والشحنة الباريونية على جميع أنواع التفاعلات (قوية - كهرومغناطيسية - ضعيفة).

ظهر أيضا فى نواتج التصادمات القوية للغاية انتظامات أخرى دقيقة لم نضعها فى الاعتبار فى القانونين السابقين. يتسنى لنا تصنيف هذه الانتظامات الجديدة بإدخال نوع آخر من الشحنة إلى كل هادرون ونطلق عليها اسم الشحنة الفوقية، $\hat{Y}$. قيم Y للهادرونات المختلفة معطاة بالجدول ١٥-١. مرة أخرى فإن الشحنة الفوقية لأى جسيم ضديد تساوى فى المقدار وتختلف فى الإشارة مع الجسيم المناظر. بالإضافة لذلك نفترض أن محصلة الشحنة الفوقية محفوظة فى أى تفاعل نووى (نووى إلى المدى الذى نستطيع عنده إهمال التفاعلات الكهرومغناطيسية والضعيفة)

أى أن

$$\Delta Y = 0 \qquad (١٥-٧)$$

لذلك يجب أن نحصل على

$$p\pi^{+} \rightarrow \Sigma^{+} K^{+} \pi^{0} \;, \qquad (١٥-٨)$$

$$p\overline{p} \rightarrow \Lambda \overline{\Lambda} \;, \qquad (١٥-٩)$$

$$p\pi^{-} \rightarrow \Xi^{-} K^{+} K^{0} \qquad (١٥-١٠)$$

ولكن على سبيل المثال من غير المتاح الحصول على

$$K^{-} p \rightarrow \pi^{-} p$$

ولهذا ينسب إلى كل جسيم نووى جزئى، بالإضافة إلى كتلته ومغزليته، ثلاثة أنواع من الشحنة (الشحنة الكهربية - الشحنة الباريونية - الشحنة

الفوقية). وقد وجد أن محصلة الشحنة الكلية لكل من هذه الشحنات محفوظة فى أى تفاعل نووى.

جدول ١٥-١ الشحنات النووية-الجزئية. يعطى الجدول الشحنة الكهربية Q والشحنة الباريونية B والشحنة الفوقية Y للجسيمات النووية-الجزئية المعروفة. مركبة المغزلية النظائرية تساوى $I_3 = Q - \frac{Y}{2}$

	B	Q	Y	$I_3 = Q - Y/2$
Ξ^-	١	−١	−١	−١/2
Ξ^0	١	0	−١	+١/2
Σ^+	١	+١	0	+١
Σ^0	١	0	0	0
Σ^-	١	−١	0	−١
Λ	١	0	0	0
n	١	0	+١	−١/2
p	١	+١	+١	+١/2
K^-	0	−١	−١	−١/2
K^0	0	0	−١	+١/2
π^+	0	+١	0	+١
π^0	0	0	0	0
π^-	0	−١	0	−١
η	0	0	0	0
K^0	0	0	+١	−١/2
K^+	0	+١	+١	+١/2

يمكن ربط قوانين الحفظ هذه بعدم التغير بالنسبة للانتقالات الوحدية بالطريقة الآتية (انظر البند ١٣-٥):

تبدو دوال الحالة التى تصف الحالات الابتدائية والنهائية لعمليات التصادم المذكورة منذ قليل فى صورة أكثر صعوبة من نظيرها الوارد فى الأبواب

السابقة. فبالإضافة إلى إعطاء معلومات عن التشكيلات الفراغية والمغزلية للجسيمات فيجب أن تصف الدوال الجديدة هنا طبيعة الجسيمات؛ أى هل الجسيمات بروتونات $\langle p|$ أم نيوترونات $\langle n|$، ....، وهكذا. بالمثل يجب أن نعبر عن هاميلتونى التفاعل بدلالة المؤثرات التى تُفْنِى وتُوَلِّد هذه الجسيمات، حيث أنه بمرور الزمن يمكن أن تتغير طبيعة الجسيمات بالحالة - يعد هذا تعميما للمعادلتين (١٢-٧١)، (١٢-٧٢) التى تعطى طاقة المهتز التوافقى بدلالة مؤثرى الإفناء والتوليد لوحدات الطاقة. سنهتم هنا فقط بالمعاملات الأخيرة فى متجهات الحالة التى يجب أن تكون متجهات مناسبة للمؤثرات $\hat{Q}, \hat{B}, \hat{Y}$.

إذا كانت $\langle i|$ هى الحالة الابتدائية فى تصادم معين فإننا نجد

$$\hat{Q}|i\rangle = Q_i|i\rangle \qquad (١٥-١١)$$

حيث Q_i هى محصلة الشحنة الكلية للحالة الابتدائية.

الانتقال الوحدى المناظر هو

$$\hat{U}_Q = \exp\left[\iota \hat{Q} \varepsilon\right] \qquad (١٥-١٢)$$

حيث ε بارامتر حقيقى.

إذا كان $\hat{H}_s$ هو هاميلتونى التفاعل القوى فإننا نعبر عن حفظ الشحنة بعدم تغير H_s بالنسبة إلى الانتقال (١٥-١٢) (انظر المعادلة (١٣-٦٨)):

$$\begin{aligned} \langle f|H_s|i\rangle &= \langle f|U_Q^{+} H_s U_Q|i\rangle \\ &= \langle f|H_s|i\rangle \exp\left[\iota(Q_i - Q_f)\varepsilon\right] \end{aligned} \qquad (١٥-١٣)$$

وهذا يؤدى إلى

$$\langle f|H_s|i\rangle = 0 \qquad (١٥-١٤)$$

مالم يكن

$$Q_f = Q_i \qquad (١٥-١٥)$$

هذا يعنى أن الهاميلتونى يزاوج الحالة النهائية $\langle f|$ مع الحالة الابتدائيـة $|i\rangle$ عندما يكون لهما نفس الشحنة الكلية فقط

لاحظ أنه إذا احتوت الحالة على العديد من الجسيمات المشحونة فإن عمل مؤثر الشحنة يكمن بالضبط فى استخلاص محصلة شحنة الحالة:

$$\hat{U}_Q|pn\pi^+\rangle = \exp[\iota\hat{Q}\varepsilon]|pn\pi^+\rangle = \exp[\iota(Q_p + Q_\pi)\varepsilon]|pn\pi^+\rangle$$

(١٦-١٥)

حيث

$$Q_p = Q_\pi = +1$$

هى شحنتى البروتون والميزون π^+.

وهى عبارة عن انتقالات وحدية ببارامتر واحد وتُكوّن ماهو معروف بالمجموعة $U(1)$.

من الممكن إدخال انتقالات وحدية مشابهة، $\hat{U}_Y, \hat{U}_B$ ، مصاحبة لحفظ الشحنة الباريونية والفوقية، على الترتيب. عند هذه المرحلة بالذات ندرك أن خواص عدم التغير السالفة للهاميلتونى ليست فى غاية الأهمية ولكنها تمهد لنا الطريق إلى تعميمات أخرى مثمرة للغاية

١٥-٢ المغزلية النظائرية والمجموعة SU(2)(1)

تتمتع الهادرونات بصفة ملفتة للنظر لم يرد ذكرها فى النظرية التى عرضناها حتى الآن. هذه الصفة هى الطريقة التى يظهر بها الهادرونات

---

(1) isotopic spin and SU(2)

فى صورة تعددات[1] لشحنات مختلفة بكتل متساوية تقريبا (انظر الجدول ١١-١). لذلك نلاحظ وجود اثنين من النيوكلونات وثلاثة من النوع Σ واثنين من النوع Ξ. يبدو من المعقول افتراض أن فروق الكتل فى تعدد معين هى من نواتج تأثيرات كهرومغناطيسية، وأنه فى حدود التفاعلات القوية تماما تكون كل أعضاء التعدد لها بالضبط نفس الكتلة. بالإضافة لذلك نفترض أن (بالمعنى الذى سنحدده لاحقا) التفاعلات القوية عديمة التغير عندما تتبادل الجسيمات لمواضعها داخل تعدد كتلى[2] .

للتخصيص نفترض أن البروتون والنيوترون هما حالتى النيوكلون الممكنتان، وأنهما مشابهتين لحالتى المغزلية الممكنتان للبروتون.

نُعَرّف الدوار المغزلى النيوكلونى[3] N_a الثنائى المركبة $(a=1,2)$ بالمعادلة

$$N_a = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad (١٥-١٧)$$

مثل هذه المعاملات تظهر فى متجهات الحالة لتحديد طبيعة الجسيمات.

نفترض عدم تغير التفاعل القوى من تأثير الانتقالات الوحدية (التى على النظم (2×2)) لهذه الدوارات المغزلية. يكتب مثل هذا الانتقال فى صورته الأكثر عمومية كالآتى:

$$N_a \rightarrow \sum \hat{U}_a^b N_b$$

حيث

$$\hat{U}_a^b = \exp\left[\frac{i}{2}\left(\varepsilon^{(1)}\hat{\tau} + \varepsilon^{(2)}\hat{\tau}_2 + \varepsilon^{(3)}\hat{\tau}_3\right)\right]_a^b , \qquad (١٥-١٨)$$

$\varepsilon^{(i)}(i=1,2,3)$ بارامترات حقيقية.

---

(1) multiplets (2) mass multiplets (3) nucleon spinor

المصفوفات الهرميتية الثلاثة تماثل عدديا مصفوفات المغزلية لباولى، المعادلة (٨-٣٢)،

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (١٥-١٩)$$

(تم هنا استبعاد الانتقالات التى على الصورة

$$\hat{U} = \exp\left[\iota\,\varepsilon\,\hat{I}\right], \ \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (١٥-٢٠)$$

التى تعد انتقالات طورية متزامنة[1] (آنية) لكل من n,p، وقد عرضنا ذلك من قبل عند الحديث عن حفظ الشحنة الباريونية.)

وحيث أننا نتعامل مع انتقالات وحدية علىالنظم (2x2) فإننا نصب اهتمامنا على انتقالات المجموعة SU(2). بسبب التشابه مع المغزلية فإن هذه الانتقالات يطلق عليها اسم الانتقالات المغزلية النظائرية[2].

من بين الثلاث مصفوفات $\hat{\tau}$، نجد ان المصفوفة

$$\frac{1}{2}\hat{\tau}_3 \equiv \hat{I}_3 \qquad (١٥-٢١)$$

قطرية.

بمقارنة المعادلة (١٥-١٨) مع المعادلة (١٣-٥٧) فى حالة الانتقالات التى فيها $\varepsilon^{(3)}$ فقط لاتساوى الصفر فإننا ندرك أن $\hat{I}_3$ تلعب نفس دور $\hat{F}$ وأنها كمية محفوظة من الممكن ملاحظتها مثل $\hat{B}, \hat{Q}, \hat{Y}$.

بالتعويض المباشر عن المصفوفات ومتجهات الحالة نحصل على

$$\exp\left[\iota\,\varepsilon^{(3)}\,\hat{I}_3\right]p\rangle = \exp\left[\iota\,\varepsilon^{(3)}\left(+\frac{1}{2}\right)\right]|p\rangle\ , \qquad (١٥-٢٢)$$

---

(1) simultaneous phase transformation (2) isotopic spin transformation

$$\exp\left[\iota\,\varepsilon^{(3)}\,\hat{I}_3\right]n\rangle = \exp\left[\iota\,\varepsilon^{(3)}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]|n\rangle \qquad (٢٣-١٥)$$

وذلك لكى تكون الشحنة I_3 لكل من n,p مساوية 1/2+ , 1/2-، على الترتيب.

يتسنى لنا الآن تأسيس تعددات أخرى للجسيمات التى تنتقل خاضعة للانتقالات المغزلية النظائرية.

الذى يرتبط مباشرة بالمغزل الدوار النيوكلونى هو المغزل الدوار النيوكلونى الضديد(1)

$$\overline{N}^a = (\overline{p},\overline{n}) \qquad (٢٤-١٥)$$

الذى ينتقل طبقا للعلاقة

$$\overline{N}^a \rightarrow \sum_b \overline{N}^b\,\hat{U}^{+a}_{\ b} \qquad (٢٥-١٥)$$

حتى تصبح قيم I_3 لكل من $\overline{n},\overline{p}$ مساوية 1/2- , 1/2+، على الترتيب.

يمكن الحصول على تعددات أخرى بتراكب النيوكلونات والنيوكلونات الضديدية. لهذا فإننا نحصل على التراكب القياسى(2)

$$\eta = \sum_a \frac{1}{\sqrt{2}} N_a\,\overline{N}^a = \frac{p\overline{p} + n\overline{n}}{\sqrt{2}} \qquad (٢٦-١٥)$$

الذى فيه

$$Q = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad Y = 0$$

من الممكن أيضا الحصول على

---

(1) anti-nucleon spinor (2) scalar combination

$$\pi_a^b \equiv \left[N_a \bar{N}^b - \frac{1}{2}\delta_a^b\left(\sum_c N_c \bar{N}^c\right)\right]$$

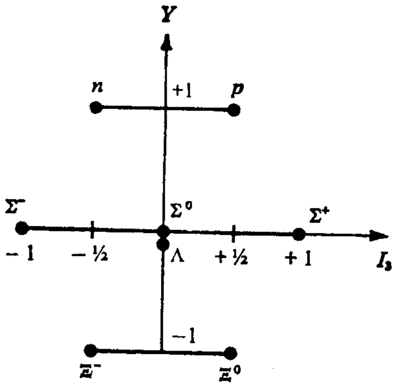
$$= \begin{pmatrix} \frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{2} & p\bar{n} \\ n\bar{p} & -\frac{p\bar{p} - n\bar{n}}{2} \end{pmatrix} \qquad (٢٧-١٥)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

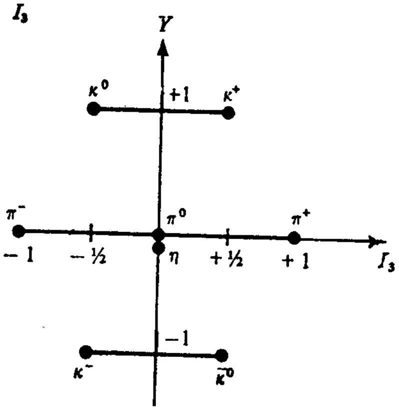
نعين قيم كل من I_3, Y, B, Q للتراكيبات المختلفة من النيوكلونات والنيوكلونات الضديدية بجمع القيم المناسبة للجسيمات المشاركة. يمكن لنا حينئذ تمييز التراكيبات الثلاثة المختلفة التى تظهر فى الحالات المختلفة الثلاثة للميزون‑π (π^+, π^0, π^-) بواسطة قيم I_3 التى تساوى على الترتيب $+1$ ، 0 ، -1 . وهذا هو جوهر التعبير الأخير بالمعادلة (٢٧-١٥). يمكن التفكير فى هذه التعددات، بطريقة فيزيائية تامة، على أنها حالات مقيدة تم تكوينها من النيوكلونات والنيوكلونات الضديدية، وأنها تتفاعل مع بعضها من خلال قوى عديمة التغير بالنسبة للانتقالات المغزلية النظائرية.

أشكال التعددات الثلاثة هذه- وهى التعدد القياسى[1] (المسمى بالأحادى[2]) والتعدد المغزلى الدوار (المسمى بالثنائى[2]) والتعدد الاتجاهى (المسمى بالثلاثى[3]) كافية لبيان الجسيمات النووية الجزئية الواردة بالجدول ١١-١. وضعت هذه التعددات بيانيا مع قيم Y لها فى شكل ١٥-١

(1) scalar (2) singlet (3) doublet (3) triplet



(a)

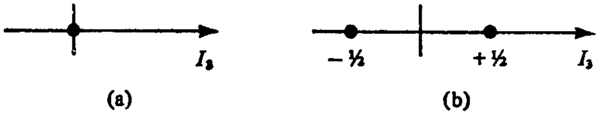


(b)

شكل ١٥-١ شكل يوضح التعددات-الجزئية لجسيمات المجموعة SU(2) (المتصلة بالخطوط الداكنة) مع قيم I_3, Y لها. كل جسيمات شكل (أ) لها $B=0$ ومغزلية مساوية $1/2\hbar$، بينما فى شكل (ب) $B = 0$ والمغزلية تساوى صفر . كل تعدد من هذه التعددات الجزئية يشتمل على تعدد ثمانى من المجموعة SU(3). وجد سنة ١٩٦١ تعدد مشابه، للجسيمات التى لها $B=0$ ومغزلية مساوية $\hbar$. تم هذا بإجراء الاستبدال $\pi \leftarrow \rho(765\ MeV/c^2)$؛ $\eta \leftarrow \varphi(1020\ MeV/c^2)$؛ $K \leftarrow K^*(890\ MeV/c^2)$.

بعرض تلك الجسيمات بهذه الطريقة يتبين لنا أنها تكون نماذج منتظمة، وهذا ماسنقوم بدراسته فى البند القادم.

قبل البدء فى دراسة هذه الظاهرة نعتبر تركيبا هندسيا تبادليا[1] لتعددات SU(2) (النظائرية). نعين التعدد بيانيا بواسطة قيم I_3 لمركباته. من أبسط التعددات هو القياسى الأحادى المركبة، $I_3=0$، شكل ١٥-٢أ. التعدد الذى يلى هذا مباشرة هو المغزل الدوار، $I_3=\pm 1/2$، شكل ١٥-٢ب.

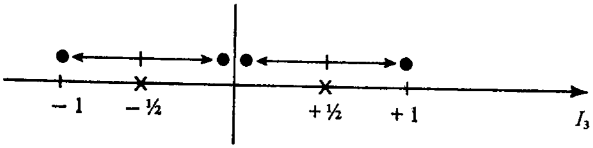


شكل ١٥-٢ التمثيل البيانى لتعددات SU(2) لكل من (أ) القياسى الأحادى (ب) المغزل الدوار الثنائى الأساسى.

نظرا لأن I_3 تتمتع بخاصية الجمع[2] فعند تراكب اثنين من المغزليات الدوارة يمكن إما إضافة أو طرح 1/2 من أحد هذه المغزليات الدوارة ثم جمعها جبريا على كل مركبات المغزل الدوار الآخر للحصول على قيمة I_3 للتراكب المعنى. قمنا بعمل ذلك فى شكل ١٥-٣ الذى فيه أدخل التمثيل البيانى للمغزل الدوار الأساسى على نقطتى شكل ١٥-٢ب. بإزالة أحد النقطتين الناشئتين عند نقطة الأصل، وذلك لأنها تعيد إنتاج شكل ١٥-٢أ (قياسى المعادلة (١٥-٢٦))، يتبقى لنا الثلاثى المؤسس جبريا فى المعادلة (١٥-٢٧)، ($I_3=\pm 1,0$).

---

(1) alternative geometrical construction (2) additive



شكل ١٥-٣ التركيب الهندسى للتعددات التى نحصل عليها من تراكب اثنين من ثنائيات المجموعة SU(2). أدخل الرسم المبين لأحد ثنائيات شكل ١٥-٢ب على كل عضو من أعضاء الثنائى الآخر (المشار إليه بالعلامة x) وذلك للحصول على أحادى ($I_3=0$) وثلاثى ($I_3= 0, \pm 1$).

إذا تم بنفس الطريقة تراكب ثنائى آخر مع الثلاثى فمن السهل بيان أن هذا يعيد إنتاج الثنائى الأصلى بالإضافة إلى تعدد جديد مكون من أربع حالات I_3 لها تساوى $\pm 1/2$, $\pm 3/2$. نستطيع الإسهاب أكثر فى تتبع هذا السلوك، وقد تم بالفعل تعميم ذلك فى البند التالى لتكوين تعددات مناظرة لخواص عدم تغير أكثر تعقيدا.

١٥-٣ طريقة الثمانى والمجموعة SU(3)[1]

عند رسم تعددات المجموعة SU(2) التى لها نفس المغزلية والشحنة الباريونية، كما فى شكل ١٥-١، نجد أنها تنشىء نماذج سداسية منتظمة مكونة من ثمانية جسيمات. مانريده الآن هو إيجاد تفسير لذلك.

من أول الاشياء التى نلاحظها بالجدول ١٥-١ مايلى:

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2} \qquad (١٥-٢٨)$$

---

(1) the eight-fold way and SU(3)

أشرنا من قبل فى البند ١٥-٢ إلى عدم التغير بالنسبة لانتقالات المجموعة SU(2)، وذلك لتقديم الأساس للتعددات النووية الجزئية. أدى هذا إلى قانون حفظ الشحنة I_3. إذا كانت الشحنة Y محفوظة أيضا فإن المعادلة (١٥-٢٨) تعنى أن Q تكون محفوظة هى الأخرى. فى محيط التفاعلات القوية تبدو الشحنة الكهربية ككمية ثانوية.

لتفسير النماذج المنتظمة بشكل ١٥-١ كان من الطبيعى تطوير هذه الأفكار ومحاولة إشراك $\hat{Y}$ أيضا فى التركيب العديم التغير. لعمل ذلك يتحتم علينا افتراض أن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير (تقريبيا على الأقل) فى محيط مجموعة كبيرة من الانتقالات التى تعطى مصفوفة هرميتية قطرية ثانية[1] (ملاحظات مصفوفة) والتى يمكن تمييزها بالكمية $\hat{Y}$.

من أبسط الوسائل التى أثبتت فاعليتها هو التفكير فى الجسيمات النووية الجزئية على أنها تتركب من ثلاثى من كواركات أساسية[2]

$$q_a = \begin{pmatrix} p' \\ n' \\ \lambda' \end{pmatrix} \quad , \quad (a = 1,2,3) \qquad (١٥-٢٩)$$

وأن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير تقريبيا عند إجراء الانتقالات الوحدية التى على النظم (3x3) لهذا الثلاثى الكواركى، أى انتقالات المجموعة SU(3)،

$$q_a \rightarrow \hat{U}_a^b q_b \qquad (١٥-٣٠)$$

(عدم التغير تقريبى فقط حيث أنه يؤدى إلى تعددات بكتل أكبر ، ويجمع

---

(1) a second diagonal Hermitian matrix (2) a triplet of basic quarks

سويا جسيمات كتلها الفيزيائية الملاحظة منفصلة تماما.)

يكتب الانتقال العام على النحو

$$\hat{U} = \exp\left[\iota \sum_{j=1}^{8} \varepsilon^{(j)} \hat{F}_j\right] \qquad (١٥-٣١)$$

حيث $\varepsilon^{(j)}$ بارامترات حقيقية اختيارية. المصفوفات الهرميتية معطاة بالجدول ١٥-٢.

اثنين من هذه المصفوفات قطرية وتُعطِي الأعداد الكمية المحفوظة القابلة للجمع. يتضح لنا من الجدول ١٥-٢ أن $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \hat{F}_3$ تؤثر فقط على أول مركبتين من مركبات q_a، وتعيد إنتاج الانتقالات النظائرية لتعددات المجموعة، SU(2). لذلك فإن المجموعة الجديدة من الانتقالات تتضمن ماذكرناه سالفا بالبند ١٥-٢، وعلى وجه الخصوص تؤسس خواص I_3 للكواركات المدونة بالجدول ١٥-٣.

أما المصفوفة القطرية الأخرى فهى $\hat{F}_8$. هدفنا الآن هو ربط هذه المصفوفة بالكمية $\hat{Y}$. العلاقة التى نضعها بعد تزكيتها بالنتائج هى

$$\hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \qquad (١٥-٣٣)$$

باعتبار التأثير على q_a بالانتقالات التى فيها $\varepsilon^{(8)}$ فقط لاتساوى صفر يمكننا تعيين، كما فى المعادلتين (١٥-٢٢)، (١٥-٢٣)، قيم Y لكل من p', n', λ' المعطاة بالجدول ١٥-٣. حينئذ من العلاقة (١٥-٢٨) نعين قيم Q المعطاة.

جدول ١٥-٢ مصفوفات تعددات SU(3). المصفوفات المُوَلِّدة لانتقالات المجموعة SU(3). يوجد مصفوفتان قطريتان تعطى الأعداد الكمية المحفوظة القابلة للجمع، وتميز بالعلاقتين $\hat{I}_3 = \hat{F}_3 ,\hat{Y} \frac{\sqrt{3}}{2} = \hat{F}_8$.

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\iota & 0 \\ \iota & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\iota \\ 0 & 0 & 0 \\ \iota & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\iota \\ 0 & \iota & 0 \end{pmatrix}, \hat{F}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

جدول ١٥-٣ خواص الكواركات

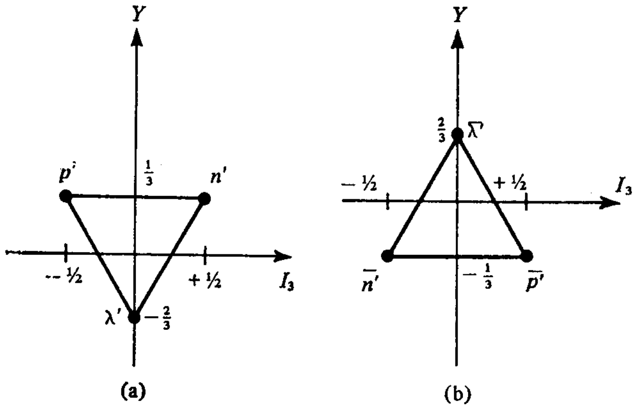
	I_3	Y	Q	B
p′	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
n′	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
λ′	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

أخيرا يجب أن نعتبر B مساوية 1/3 نظرا لأننا نريد تكوين جسيمات بشحنة فوقية مساوية لعدد صحيح وشحنة باريونية مساوية للواحد الصحيح.

الكوارك الضديد[1]

$$\bar{q}^{a} = \left(\bar{p}', \bar{n}', \bar{\lambda}'\right) \qquad (١٥-٣٤)$$

كل أعداده الكمية تتساوى فى المقدار وتختلف فى الإشارة مع q_a. هذان الثلاثيان الأساسيان (الكوارك والكوارك الضديد) ممثلان بيانيا بشكل ١٥-٤.



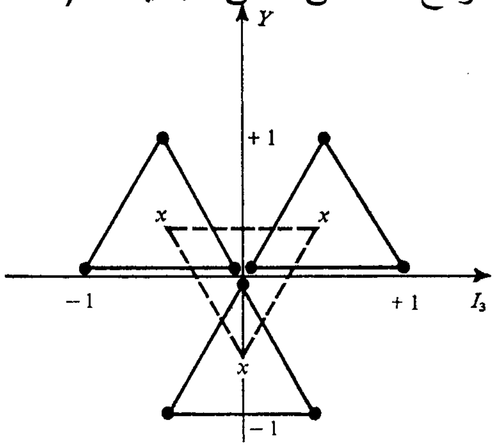
شكل ١٥-٤ التمثيل البيانى لثلاثيات SU(3) الأساسية (أ) الكوارك ، 3. (ب) الكوارك الضديد ، $\bar{3}$. عند اختيار مقياس رسم مناسب لجعل $F_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y, F_3 = I_3$ فإن هذه الكواركات تمثل بمثلثات متساوية الأضلاع.

نستطيع الآن تطبيق التعميم الواضح للوسيلة البيانية المعطاة بالبند السابق، وذلك لتكوين تعددات أخرى للجسيمات التى تتنقل فيما بينها خاضعة لانتقالات SU(3). وحيث أن I_3 ، Y شحنات قابلة للجمع مثل الأعداد الكمية تماما فإننا نُكَوِّن الجسيمات الحاصلين عليها من تراكب $q_a, \bar{q}^a$، مثلا. يتسنى لنا ذلك بإدخال المثلث الممثل للكوارك الضديد $\bar{q}^a$ (شكل ١٥-٤ب) على كل نقطة من نقاط الكوارك q_a (شكل ١٥-٤أ). هذه

---

(1) anti-quark

العملية موضحة بشكل ١٥-٥. من بين الثلاث نقاط التى تتواجد عند المركز يجب إزالة إحداهما حيث أنها تمثل القياسى الأحادى[1]، أما النقاط المتبقية فهى تعيد النموذج السداسى ثمانى الجسيمات (شكل ١٥-١ب).



شكل ١٥-٥ نموذج الأحادى والنموذج السداسى ثمانى التعدد الحاصلين عليهما بإدخال مثلثات $\bar{3}$ على نقاط 3، مما يؤسس بيانيا معادلة التعدد $3\otimes\bar{3}=8\oplus1$. هذا يبين لنا الطريقة التى بها عدم تغير SU(3) يولد التعدد العلوى للميزونات الموضح بشكل ١٥-١ب.

نظرا لأن الشحنة الباريونية B تساوى صفر $(B=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0)$ فإن تفسير كل الأعداد الكمية للتعدد الميزونى[2] يتم بشكل مقنع. نستطيع كتابة التراكب المؤسس من الثلاثى 3 والثلاثى الضديد $\bar{3}$ الذى يُوَلِّد الأحادى **1** والثمانى **8** كما يلى:

$$3\otimes\bar{3}=8\oplus1 \qquad (١٥-٣٥)$$

بإدخال المثلثات التى بشكل ١٥-٤أ على النقاط التى بنفس الشكل يمكن أن يتبين القارىء بنفسه وبسهولة أن حاصل ضرب اثنين من الثلاثيات الكواركية يولد كوارك ضديد $\bar{3}$ بالإضافة إلى نموذج مثلثى آخر **6** مكون

(1) singlet scalar (2) meson multiplet

من ست نقاط.

$$3\otimes 3=6\oplus \bar{3} \qquad (١٥-٣٦)$$

بعد ذلك يمكن إجراء تراكب لثلاثى كواركى آخر **3** بإدخال المثلثات المناسبة على نقاط كل من **6** , $\bar{3}$.. هذا التراكب الأخير أُعطى من قبل فى المعادلة (١٥-٣٣).

التراكب بين كل من **3** , **6** يعطى الثمانى **8** بالإضافة إلى نموذج عشارى مثلثى[1] جديد (انظر شكل ١٥-٦). بتجميع تلك النتائج فيما بينها فإننا نحصل عند تراكب ثلاث من الكواركات على الآتى:

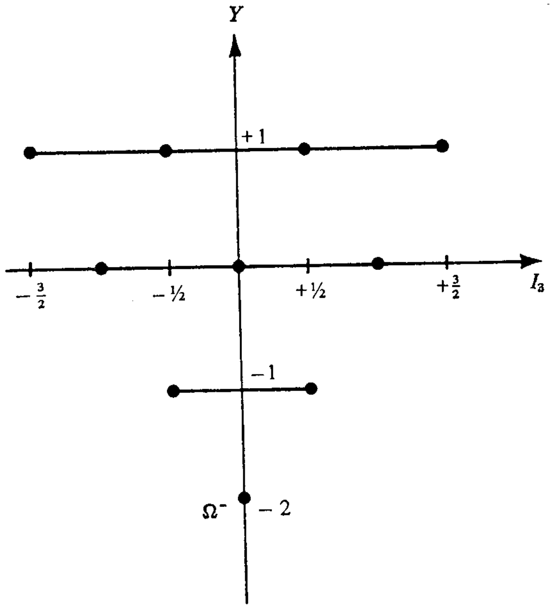
$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}\oplus 2\times\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}$$

حيث أنه من الجدول ١٥-٣ B=1 (B=1/3 + 1/3 + 1/3) لهذه الجسيمات فإن **8** لهذا التركيب يعلل النموذج ثمانى الجسيمات الذى فيه B=1 والمغزلية مساوية $1/2\hbar$ الموضح بشكل ١٥-١ب. لهذا فإننا نشرك $\hat{Y},\hat{I}_3$ فى خاصية عدم تغير (تقريبية) عامة فى التفاعلات القوية ونحسب بنجاح اثنين من التعددات العليا[2] SU(3) لكل الهادرونات المتواجدة بالجدول ١١-١.

أثناء سنة ١٩٦١ اكتشف ثمانى آخر من الجسيمات التى مغزليتها مساوية $\hbar$ والتى لها B=0، وقد وجد أنها تتناسق بإتقان فى نموذج شكل ١٥-٥. وفى سنة ١٩٦٢ اكتشف تسع جسيمات نووية جزئية أخرى وظهر أن مغزليتها تساوى $3/2\hbar$ وأن قيمة B لها مساوية للواحد الصحيح. ملأت هذه الجسيمات الثلاثة صفوف العليا من شكل ١٥-٦، وتنقسم إلى رباعى

---

(1) triangular decuplet pattern (2) super multiplet



شكل ١٥-٦. العشارى، 10، الذى يتكون بتراكب ثلاثة من الثلاثيات الكواركية الأساسية، 3. تم اكتشاف التسع جسيمات المناظرة للثلاث خطوط العليا بحلول عام ١٩٦٢، ويصاحبها المقادير B=1 ومغزلية $3/2\hbar$. الجسيم العاشر Ω^-، المناظر للنقطة أسفل العمود الرأسى، تم اكتشافه عام ١٩٦٤.

(1238 MeV/c^2) وثلاثى (1385 MeV/c^2) وثنائى (1535 MeV/c^2) التى قيم Y لها تساوى على الترتيب 1+ ,0, 1- . عدم التغير بالنسبة إلى انتقالات المجموعة SU(3) اقترح علينا حينئذ وجود الجسيم العاشر المفقود اللازم لتكوين العشارى. أشير إلى هذا الجسيم بالرمز Ω^-. قيمة I_3 لهذا الجسيم تساوى صفر، أما قيمة Y فتساوى 2-، وعليه فمن المعادلة (١٥-٢٨) نستنبط أن قيمة Q لابد وأن تساوى 1-. بمعلومية كتل الأعضاء

الأخرى للعشارى نستطيع تقدير كتلة هذا الجسيم العاشر بالمقدار 1685 MeV/c^2.

أوضحت قوانين حفظ كل من I_3,Y,B أن أبسط الطرق لإنتاج هذا الجسيم هو استخدام حزمة من K^- فى غرفة الفقاعة الهيدروجينية لحدوث التفاعل

$$K^- p \rightarrow K^+ K^0 \Omega^-$$

ولكن من الكتلة المقدرة لهذا الجسيم اقترح أنه مستقر فى التفاعلات القوية، إلا أنه يتحلل بتغير الشحنة الفوقية من خلال التفاعل الضعيف

$$\Omega^- \rightarrow K^- \Lambda$$

أو التفاعل

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-$$

وهذا ماوجد بالفعل، كما كان مقترحا سنة ١٩٦٤، فى مختبر بروكهافن بالولايات المتحدة الأمريكية فى تجربة استخدم فيها أكبر معجل للبروتونات فى ذلك الوقت. بذلك يكون قد تأسس عدم التغير التقريبى فى التفاعلات القوية بالنسبة إلى انتقالات المجموعة SU(3).

عدم التغير هذا لايعين التفاعلات القوية بطريقة وحيدة ولكنه يقيد بشدة إمكانيات التعيين. تبدو نماذج SU(3) للتعددات العليا (التى بداخلها تم تنسيق الجسيمات النووية الجزئية) قريبة الشبه بالجدول الدورى للعناصر الكيميائية. توضح لنا هذه النماذج أن عدد الهادرونات المختلفة ليس له أهمية جوهرية. يجب التفكير فى هذه الجسيمات على أنها تركيبات معقدة ويوجد عدد غير محدود منها، بالضبط كما يوجد عدد غير محدود من مستويات الطاقة الذرية أو النووية. إذا أمكن النظر إلى هذه الجسيمات على أنها عبارة عن أى شيىء بسيط (أى مثل تفكيرنا فى مستويات الطاقة بذرة

الهيدروجين على أن جميعها عبارة عن حالات مقيدة لبروتون وإلكترون) فسوف يتضح لنا أنها مؤسسة من الكواركات. تعد هذه الفكرة ثورة كبيرة فى علم الفيزياء لأنها تتضمن وجود جسيمات شحنتها الكهربية مساوية لكسر عشرى (مقاسة بوحدة شحنة الإلكترون)، حيث نعتبر دائما فى الفيزياء أن شحنة الإلكترون غير قابلة للانقسام. ينظر إلى وجود ثلاثة من الكواركات الأساسية كتركيب جزئى لكل الهادرونات على أنه من الوسائل المتاحة التى تستحوذ على اهتمامنا والتى يجب اختبارها فى السنوات المقبلة. إلا أنه يجب تذكر أن المخطط الوحدى[1] لايستلزم وجود الكواركات بالفعل. فمن الممكن لكل الهادرونات أن تفسر بعضها البعض بواسطة قوى عديمة التغير تقريبيا بالنسبة لانتقالات المجموعة SU(3)، وأن الكواركات ماهى إلا وسيلة رياضية لإجراء الحسابات. ومع ذلك فأيا كان الكواركات موجودة أم لا فإنها تعد أحد الأسئلة الصريحة الحيوية التى تواجه الفيزيائيين.

١٥-٤ ملخص

اعتبرنا هنا التفاعلات القوية الحادثة بين الهادرونات. ظهر أنه يمكن تنظيم هذه التفاعلات بإشراك ثلاثة أنواع من الشحنات إلى كل جسيم نووى جزئى، وهى الشحنة الكهربية Q والشحنة الباريونية B والشحنة الفوقية Y. كل شحنة من هذه الشحنات تكون محفوظة فى أى تفاعل نووى ويمكن ربطها بعدم التغير بالنسبة إلى عائلة بارامتر واحد من الانتقالات الوحدية للمجموعة SU(1).

(1) unitary scheme

يمكن تفسير ظهور الهادرونات فى التعددات الكتلية بافتراض أن التفاعلات القوية تكون عديمة التغير بالنسبة إلى مجموعة الانتقالات الوحدية التى على النظم (2×2)،SU(2). ينشأ عن ذلك شحنة عامة جديدة، I_3 ، محفوظة هى الأخرى وتحل محل Q فى التفاعلات القوية.

يُظهر التمثيل البيانى للهادرونات الملاحظة (بدلالة Y,I_3) انتظامات معينة تقترح علينا وجود خواص عدم تغير أكثر عمومية. فُسرت هذه الخواص على ضوء عدم تغير تقريبى بالنسبة للانتقالات الوحدية التى على النظم (3×3)، SU(3). هذا يتضمن حفظ كل من Y,I_3، وقد تأكد ذلك باكتشاف الجسيم المقترح Ω^-.

هذه المفاهيم تقترح علينا أن جميع الهادرونات لابد أن تكون عبارة عن حالات مقيدة لثلاثى من الجسيمات التى مغزليتها تساوى $1/2\hbar$، وشحنتها تساوى كسر عشرى مقاسة بوحدة شحنة الإلكترون. أُطلق على هذه الثلاثيات اسم الكواركات.

والحمد لله الذى تتم بفضله الصالحات

ملحق

الثوابت والوحدات

أ-١ وحدات الطاقة وكمية الحركة والكتلة

من الملائم فى الفيزياء الذرية تعريف وحدة للطاقة وهى الإلكترون فولت (eV). الإلكترون فولت هى الطاقة التى يكتسبها إلكترون واحد نتيجة وضعه تحت تأثير طاقة وضع مقدارها واحد فولت $\left(1 Volt = \frac{1}{300} cgs\right)$.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-12} \quad \text{erg} = 1.6 \times 10^{-19} \quad \text{joule}$$

وحدة الطاقة فى الفيزياء النووية، التى لها أهميتها، هى المليون إلكترون فولت (MeV).

$$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-6} \quad \text{erg} = 1.6 \times 10^{-13} \quad \text{joule}$$

وحدات كمية الحركة الخطية المناظرة هى

$$1 \text{ eV/c} = 0.5 \times 10^{-22} \quad \text{cgs} = 0.5 \times 10^{-27} \quad \text{mks}$$
$$1 \text{ MeV/c} = 0.5 \times 10^{-16} \quad \text{cgs} = 0.5 \times 10^{-21} \quad \text{mks}$$

ووحدة الكتلة هى

$$1 \text{ MeV/c}^2 = 1.8 \times 10^{-30} \quad \text{kg} = 1.8 \times 10^{-27} \quad \text{g} \cong 2m_e$$

أ-٢ الثوابت الفيزيائية

شحنة الإلكترون

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \quad \text{coulomb} = 4.8 \times 10^{-10} \quad \text{cgs(esu)}$$

لتجنب إدخال الوحدات الكهربية من الأنسب وضع التعريف

$$e_M^2 \equiv e^2/(4\pi\varepsilon_o) = 2.3 \times 10^{-28} \quad \text{kg m}^3 \text{ sec}^{-2}$$

كتلة الإلكترون

$$m_e = 0.91 \times 10^{-30} \quad \text{kg} = 0.91 \times 10^{-27} \quad \text{gm} = 0.51 \quad \text{MeV/c}^2$$

كتلة البروتون(النيوترون)

$$m_p(m_n) = 1.7 \times 10^{-27} \quad kg = 938(939) \quad MeV/c^2$$
$$= 1836(1838)\, m_e$$

ثابت بلانك

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \quad joule\,.\,sec = 1.05 \times 10^{-27} \quad erg\,.\,sec$$
$$[h=2\pi\hbar]$$

سرعة الضوء تساوى

$$c = 2.99 \times 10^{8} \quad m/sec = 2.99 \times 10^{10} \quad cm/sec$$

أ-٣ الثوابت الذرية

نصف قطر أدنى مدار لبوهر

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e_M^2} = 0.53 \times 10^{-10} \quad m = 0.53 \times 10^{-8} \quad m$$

ثابت التركيب الدقيق

$$\alpha = \frac{e_M^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

طاقة ربط الحالة الأرضية فى ذرة لهيدروجين

$$|E_1| = \frac{1}{2}\frac{m_e e_M^4}{\hbar^2} = \frac{1}{2}\frac{e_M^2}{a_0} = 13.6 \quad eV$$

العدد الموجى المناظر لهذه الطاقة هو الريدبرج

$$R_\infty = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar c} = 1.1 \times 10^{7} \quad m^{-1}$$

والتردد المناظر هو

$$R_\infty c = \frac{|E_1|}{2\pi\hbar} = 3.29 \times 10^{15} \quad cycles/sec$$
$$= 3.29 \times 10^{9} \quad Mc/sec$$

أ-٤ الثوابت النووية

نصف القطر النووى ~ 10^{-14} m

نصف قطر النيوكلون (أنظر المعادلة (٩-٣٦)) ~ 1.5×10^{-15} m

نصف قطر كومتون للنيوكلون

$$\frac{\hbar}{m_p c} = 0.2 \times 10^{-15} \quad m = 0.2 \times 10^{-13} \quad cm$$

الزمن النيوكلونى

$$\frac{\hbar}{m_p c^2} = 7 \times 10^{-25} \quad sec$$

مساحة المقطع

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \quad m^2 = 10^{-24} \quad cm^2$$
$$1 \text{ mb} = 10^{-31} \quad m^2 = 10^{-27} \quad cm^2$$

طاقة ربط الديوترون

$$\varepsilon = 2.1 \quad MeV.$$